

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 539.8

Васкес Альварес Иван

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ
РАБОТЕ АНТИБЛОКИРОВОЧНОЙ СИСТЕМЫ
АВТОМОБИЛЯ

Специальность 01.02.01 - теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научные руководители

д.ф.-м.н., профессор Новожилов И.В.

к.ф.-м.н., доцент Кручинин П.А.

Москва, 2006

Оглавление

Введение	3
1 Антиблокировочная система автомобиля. Устройство. Принцип действия. Алгоритмы управления	7
1.1 Устройство и принцип действия тормозной системы с АБС	7
1.1.1 Устройство тормозной системы	7
1.1.2 Цель и классификация АБС	10
1.1.3 Датчик	14
1.1.4 ЭВМ	15
1.1.5 Пневматическая тормозная система	15
1.1.6 Гидравлическая тормозная система	16
1.1.7 Силы, действующие при проскальзывании колес . . .	18
1.1.8 Цикл работы АБС	19
1.2 Некоторые особенности алгоритмов управления АБС . . .	23
2 Математическая модель движения колес, снабженных АБС.	31
2.1 Уравнения движения автомобиля.	31
2.1.1 Системы координат и переменные.	31
2.1.2 Динамические уравнения движения автомобиля в целом	33
2.1.3 Кинематические уравнения движения автомобиля .	36
2.1.4 Соотношения для сил в контакте колеса с дорогой .	37
2.1.5 Модель движения контактного элемента	38

2.1.6	Уравнения вращательного движения колеса	39
2.1.7	Модель контактных сил	40
2.1.8	Модель вертикальных колебаний колеса	41
2.1.9	Модель тормозной системы	43
2.2	Аппроксимация Паде для $\varphi(s)$ характеристики	44
2.3	Полная система уравнений	46
2.4	Фракционный анализ	49
2.4.1	Описание характерных постоянных времени задачи	49
2.4.2	Характерное время пневматической тормозной системы	56
2.4.3	Фракционный анализ уравнений движения	58
2.5	О дальнейшем упрощении уравнений движения	74
3	Периодические режимы изменения угловой скорости колеса и их устойчивость	81
3.1	Постановка задачи	81
3.2	Отыскание периодических решений	83
3.3	Уравнения в отклонениях и устойчивость периодических решений	94
3.4	Анализ устойчивости периодического решения	97
3.5	Сравнение результатов для различных типов дорожной поверхности	111
	Заключение	119
	Список литературы	121

Введение

В настоящее время одним из самых важных критериев выбора автомобиля является его безопасность. Совершенствование автомобиля включает не только повышение мощности двигателя и дизайн кузова и салона. Оно требует также повышение свойств материалов, прочности рамы автомобиля, хорошее функционирование тормозной системы в экстремальных ситуациях и многое другое. Группа интересных и актуальных задач прикладной механики связана с моделированием поведения тормозной системы автомобиля. Этой тематике посвящены исследования большой группы специалистов во всем мире. Среди них А.А. Хачатуров, И.В. Новожилов, М.Х. Магомедов в России и J.K. Hedrick, T. Gillespie и другие за ее рубежами.

Существуют разные типы конструкций тормозных устройств: барабанные, дисковые, пневматические, гидравлические, с антиблокировочными системами (АБС) и даже интеллектуальные тормозные системы. Антиблокировочной системой называют группу устройств, которые вмешиваются в управление тормозной системой автомобиля, предотвращают блокировку колес и тем самым снижают опасность заноса автомобиля.

Антиблокировочные тормозные системы (АБС) способствуют сохранению прямолинейного движения автомобиля и уменьшают тормозной путь в большинстве реальных ситуаций, особенно на мокрой или скользкой дороге.

Важность усовершенствования антиблокировочных систем подтверждается данными, приведенными ниже.

Следующая таблица показывает особенности безопасности, полученные на тормозных системах без ABS и четырехколесных антиблокировочных тормозных системах (ABS).

	Обычная система	Четырехколесная ABS
Предотвращает блокировку колеса при многих дорожных условиях		X
Позволяет водителю поддерживать управление, когда тормоза полностью применены		X
Датчики обнаруживают неизбежность блокировки колеса		X
Накачивает тормоза как водитель, только намного быстрее и более эффективно		X
Участствует, когда водитель нажимает на педаль тормоза		X
Предотвращает нежелательное вращение колеса при низком сцеплении	X	
Регулирует ускорение автомобиля в ситуациях низкого сцепления,	X	

Исследование, выпущенное американской Автомобильной Ассоциацией Производителей (ААМА) и Ассоциацией Международных Автомобильных Производителей (AIAM) показывает, что антиблокировочные тормозные системы могут значительно уменьшить число аварий. В исследовании проанализировано более 43,000 несчастных случаев во Флориде, Штате Пенсильвания и Северной

Каролине между 1985 и 1993. Чтобы гарантировать лучшие сравнения, несчастные случаи учитывались для 34 пар моделей автомобилей. Каждая пара включала модель, в которой АБС был доступен как стандартное оборудование впервые и такая же или подобная модель с самого близкого предыдущего года без АБС.

Данные использованные в исследовании были выбраны из полицейских сообщений о несчастных случаях и Национальной Транспортной Администрации Безопасности на Шоссе. Погрешность исследования - 5%. Ключевые показатели включают:

Полное число несчастных случаев понизилось на - 9 - 10 % для автомобилей с АБС.

- Число несчастных случаев на влажных, снежных и ледяных дорогах понизилось для автомобилей с АБС на 17 - 19 % по сравнению с аналогичными моделями без АБС.
- Число несчастных случаев на сухих дорогах понизилось для автомобилей с АБС на 6 - 8 % по сравнению с аналогичными моделями без АБС.
- Доля несчастных случаев, повлекших повреждения, понизилось для автомобилей с АБС на 10 - 13 % по сравнению с аналогичными моделями без АБС.
- Доля несчастных случаев, повлекших повреждения на влажных дорогах, понизилось на 24 - 28 % для автомобилей с АБС.
- Норма несчастных случаев со смертельным исходом - никакого существенного различия между автомобилями с АБС и автомобилями без АБС.

Эти данные показывают, что антиблокировочные тормозные системы представляют собой хороший способ для избежания аварий на

дорогах. Тем не менее их необходимо усовершенствовать, так как антиблокировочные системы еще имеют важные недостатки, например:

- Тормозной путь не оптимален, особенно при дорожных условиях близких к нормальным.
- Не всегда обеспечивает достаточную боковую устойчивость, особенно при активных действиях водителя.
- Наличие нежелательного колебательного поведения колес при торможении при работе АБС.

Все эти задачи пока являются до конца не решенными.

В работе рассматривается пневматическая антиблокировочная тормозная система, которая часто устанавливается на автобусах.

Разработка АБС связана с решением ряда сложных механических проблем. Одна из них - описание колебательного поведения системы во время функционирования. Анализ процессов возбуждения таких колебаний несомненно полезен для совершенствования алгоритмов антиблокировочной системы автомобиля.

Настоящая диссертация посвящена возможности возникновения и анализу устойчивости колебательного поведения в тормозной системе с АБС.

Глава 1

Антиблокировочная система автомобиля. Устройство. Принцип действия. Алгоритмы управления

1.1 Устройство и принцип действия тормозной системы с АБС

1.1.1 Устройство тормозной системы

Тормозная система служит для замедления движения автомобиля. Она превращает кинетическую энергию движения автомобиля в теплоту. Торможение осуществляется в результате воздействия тормозных колодок или дисков на колеса и замедления вращения последних вследствие этого. Мощная тормозная система не может остановить автомобиль, если сцепление колес с дорогой мало или отсутствует. В этом случае при полном нажатии на педаль тормоза, колеса остановятся, но будут проскальзывать по дороге и автомобиль будет двигаться. Обычно водители думают, что это ошибка тормозной системы, но на самом деле это ошибка водителя, который неправильно оценил условия сцепления и в результате неправильно маневрировал.

Обычная тормозная система автомобиля относительно проста. Когда водитель нажимает педаль, он оказывает воздействие на

устройство, называемое центральным тормозным цилиндром. Внутри центрального цилиндра помещается поршень, который создает давление в гидравлической или пневматической тормозной системе. На каждом колесе закреплен рабочий тормозной цилиндр. Повышение давления тормозной жидкости или газа в этом цилиндре приводит к увеличению тормозного момента в результате прижатия тормозных колодок к вращающимся с колесом барабану или диску. Тормоза преобразовывают кинетическую энергию колес в теплоту трения и колеса передают энергию дороге посредством трения, в результате движение автомобиля замедляется. Но эта не единственная сила, которая вызывает замедление автомобиля, есть еще сопротивление вращению колес, аэродинамическое сопротивление и сопротивление двигателя и трансмиссии. Сопротивление вращению колес не играет большой роли, но все равно помогает в процессе торможения, оно пропорционально скорости автомобиля. Аэродинамическое сопротивление важное только при высоких скоростях, так как оно пропорционально квадрату скорости автомобиля. Сопротивление двигателя очень часто является важным в процессе торможения, когда угловая скорость вращения вала двигателя высокая.

Все современные тормозные системы во много раз мощнее двигателя транспортного средства, так что, даже очень мощный автомобиль может быть остановлен тормозами. В автомобилях используется также стояночный тормоз, который работает независимо от регулярной тормозной системы. Обычно, стояночный тормоз создает момент только на задних колесах.

Существует много технических разработок, эффективно улучшающих функционирование и надежность тормозных систем. Тормозная система с усилителем теперь стандартна, и используется почти во всех пассажирских транспортных средствах. Эта система использует поставляемую двигателем энергию для увеличения усилия, создаваемого

ногой при нажатии педали. Во избежание возможности внезапного полного отказа тормоза, у некоторых современных автомобилей две параллельных тормозных системы, каждая из которых управляет парой колес, и, если одна система отказывает, другая может остановить машину.



Рис. 1.1: Барабанная тормозная система

Сами тормоза сильно улучшились за эти годы. Несколько десятилетий назад, широко использовались тормозные барабаны, и они все еще используются на задних колесах многих автомобилей. Этот тип тормоза использует конструкцию, имеющую форму барабана, который вращается с колесом. Эта конструкция изображена на рис. 1.1 В барабане установлены стационарные колодки прижимающиеся к внутренней поверхности обода колеса, когда водитель нажимает педаль тормоза. Тормозной барабан хорошо работает, но он имеет существенный недостаток - трудности отвода тепла. Отказ тормоза происходит, когда тормоз перегревается; энергия, расходуемая на торможение значительно уменьшается, и компоненты тормоза могут быть повреждены.

Существенное преимущество имеют дисковые тормоза, которые сегодня используются повсеместно на передних колесах (которые

совершают главную работу при торможении), и на многих задних колесах. Дисковые тормозные системы рис. 1.2 имеют металлический (или в некоторых гоночных автомобилях композитный) диск, который вращается вместе с колесом, и стационарные тормозные колодки, которые прижимаются к диску, когда тормоза применены. Поскольку поток воздуха, обдувающий диск большой, такие тормоза отказывают намного реже.



Рис. 1.2: Тормозная система диска

Для повышения надежности тормозов создается дополнительный поток воздуха, который обдувает диски. Когда на длинных горных спусках из-за нагрева тормоза происходит снижение тормозных усилий, водители понижают передачу, чтобы позволить двигателю снимать часть нагрузки тормозов. Современным тормозам, это обычно не требуется, за исключением ситуаций, когда автомобиль буксирует тяжелый груз при спуске на высокой скорости.

1.1.2 Цель и классификация АБС

Шины автомобиля производят максимальное замедление, когда энергия, расходуемая на торможение обеспечивает движение на

границы блокировки колеса, не допуская блокировки. Когда тормоза значительно замедляют скорость вращения колеса или блокируют его, автомобиль может начать заносить. Замедление в этом случае уменьшается, и прямолинейность движения автомобиля теряется. Тогда требуется найти способ избежания блокировки колес, чтобы сохранить прямолинейное движение автомобиля, особенно в трудных ситуациях, например; мокрые дороги или разный тип поверхности в контакте колеса с дорогой (микст).

Антиблокировочные тормозные системы (АБС) способствуют сохранению управляемости автомобиля и уменьшают тормозной путь в большинстве реальных ситуаций, особенно на мокрой или скользкой дороге. АБС использует комбинацию электроники и гидравлических или пневматических средств управления. Она позволяет работать обычной тормозной системе до блокировки колеса. При опасности блокировки система вмешивается, чтобы уменьшить усилие тормозов с тем, чтобы сохранять замедление автомобиля максимальным для данных дорожных условий, не допуская боковых движений кузова.

Типичная АБС состоит из центрального компьютера, четырех датчиков скорости вращения колес (один для каждого колеса), и двух или больше гидравлических или пневматических клапанов в цепи управления тормозам. Компьютер постоянно регистрирует скорость вращения каждого колеса. Когда компьютер обнаруживает, что любое число колес вращается значительно медленнее чем другие (условие, которое характерно для опасности блокировки), он перемещает клапаны, чтобы уменьшить давление в тормозном цилиндре, эффективно уменьшая тормозную силу на этих колесах. Это обычно вызывает характерное пульсирующее ощущение на педали тормоза.

Существуют разные конфигурации АБС, в зависимости от применения. Все системы АБС получают информацию о замедлении колеса от датчиков угловой скорости вращения колеса. Как правило,

каждое колесо оборудовано его собственным датчиком угловой скорости. Эта конфигурация названа система "четыре колеса-четыре канала", так как каждый датчик скорости колеса подает информацию на вход отдельного контура управления (слово "канал" здесь фактически относится к каждому индивидуальному электронному контуру).

В других случаях используется меньше датчиков. Многие системы АБС имеют отдельный датчик скорости колеса для каждого переднего колеса, но используют общий датчик скорости для обоих задних колес (см. рис. 1.3). Их называют системами с "тремя каналами". Датчик скорости задних колес установлен или в дифференциале, или в трансмиссии. Датчик измеряет объединенную или среднюю скорость обоих задних колес. Этот тип установки снижает стоимость системы датчиков однако понижает надежность системы вследствие обеднения поставляемой компьютеру информации.

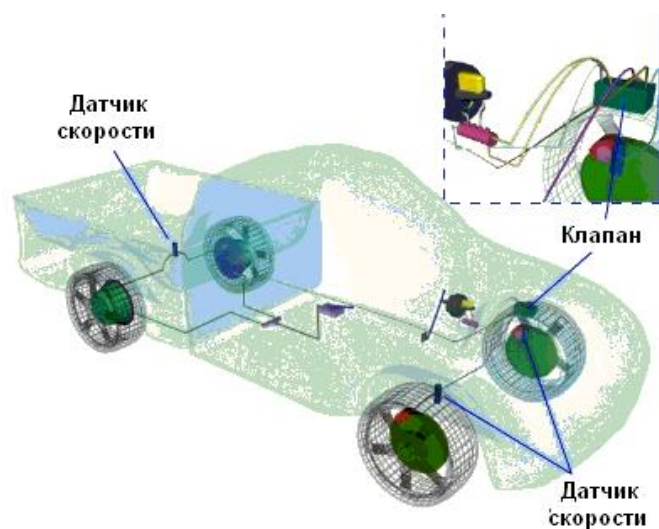


Рис. 1.3: Системами "трех каналов"

Еще один тип АБС имеет "единственный канал", только для задних колес. Такая АБС используется на многих грузовиках с задним приводом и фургонах. Таковы системы RABS используемые фирмой

"Ford"и RWAL - используемые фирмами "GM"и "Chrysler"[23]. В этих системах передние колеса не имеют никаких датчиков угловой скорости, единственный датчик скорости установлен в дифференциале или трансмиссии и используется для обоих задних колес. Специальные антиблокировочные системы заднего колеса обычно используются в тех случаях, когда загрузка транспортного средства может изменить нагрузку на заднее колесо, чаще всего на пикапах и фургонах. Поскольку такие антиблокировочные системы заднего колеса имеют единственный канал, они проще в реализации и дешевле чем трех - и четырех-канальные.

Тормоза антиблокировочной системы заднего колеса, используемые исключительно на легких грузовиках, фургонах и спортивных сервисных транспортных средствах, предотвращают блокировку только задних колес. Это позволяет водителю поддерживать стабильность прямолинейного движения и препятствует заносу автомобиля. При торможении передние колеса могут быть заблокированы так же как у обычных тормозов. При таких условиях водитель должен снизить нажатие на педаль тормоза, чтобы позволить передним колесам начинать катиться снова.

Есть еще разделение систем АБС на "Интегральные"и "неинтегральные".

Интегральные системы, использовались главным образом раньше на легковых автомобилях, они соединяют тормозной цилиндр и гидравлический модулятор АБС, насос и аккумулятор в единый комплекс.

Неинтегральные системы АБС, иногда называют "add-on". Они используются на большинстве новых автомобилей. Неинтегральные системы АБС используют обычный главный тормозной цилиндр и вакуумной усилитель с отдельным гидравлическим модулятором. Некоторые также имеют электрический насос для торможения с АБС,

но не используют насосы при нормальных условиях [18].

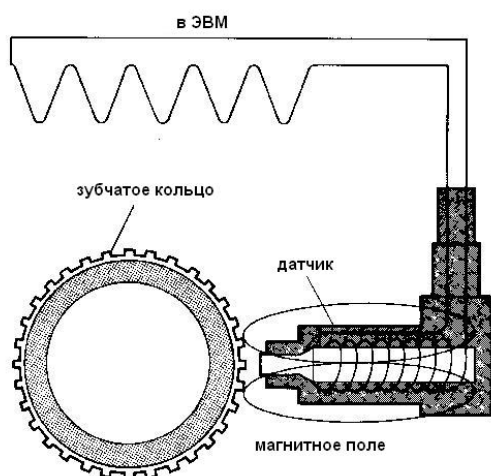


Рис. 1.4: Датчик АБС

1.1.3 Датчик

Датчики скорости колеса (WSS) состоят из магнитного чувствительного элемента и зубчатого кольца датчика. Датчик может быть установлен в районе шарнирных соединений колеса, трансмиссии или в дифференциале. В некоторых случаях, датчик - интегральная часть соединения колеса со ступицей. Кольцо датчика может быть установлено на центре оси позади ротора тормоза, на роторе тормоза непосредственно, в тормозном барабане или на трансмиссии.

Чувствительной элемент датчика скорости колеса, рис. 1.4, имеет магнитопровод, который окружает катушечная обмотка. Когда колесо вращается, зубцы на датчике движутся через магнитное поле головки. Это изменяет магнитное поле и вызывает переменный ток в катушечной обмотке. Число импульсов напряжения в секунду, которые вызваны изменением поля в головке пропорционально скорости колеса. Когда скорость увеличивается, частота импульсов датчика скорости колеса повышается.

Сигнал WSS поступает в модуль управления тормозом антиблокировочной системы, где сигнал переменного тока преобразуется в цифровой сигнал и затем обрабатывается. Модуль управления считает импульсы, чтобы регистрировать изменение скорости вращения колеса.

Ошибки датчика могут быть вызваны накоплением заусеницев в конце катушечной обмотки (они являются магнитными), погрешностями изготовления зубчатого кольца или ошибки в проводке или монтаже.

Датчики могут загрязниться металлической пылью и не обнаруживать отклонение угловой скорости колеса.

1.1.4 ЭВМ

Модуль электронного управления АБС - микропроцессор управления приводом. Он использует сигнал от датчика, чтобы регулировать давление в тормозном цилиндре во время торможения и не допускать блокировки колеса. Модуль АБС может быть установлен в багажнике или под капотом. Он может быть отдельным или соединен в единый комплекс с другими системами автомобиля.

Основные входы для модуля управления АБС - датчики угловой скорости вращения колеса и возможно переключатель педали тормоза. Переключатель сигнализирует модулю управления о начале и окончании применения тормоза.

Как любой другой электронный модуль управления, модуль АБС подвержен разрушению из-за электрической перегрузки, воздействий и экстремальных температур.

1.1.5 Пневматическая тормозная система

Пневматические тормозные системы - тормозные системы с усилителем, где поток воздуха используется как источник энергии. Когда водитель нажимает педаль, на самом деле он регулирует давление воздуха в тормозных цилиндрах. Такие системы должны иметь дублирование на

случай повреждения главной системы.

Пневматические тормозные системы часто включают три различные подсистемы: основной тормоз, стояночный тормоз, и экстренный тормоз.

Типичная пневматическая тормозная система состоит из следующих частей.

Воздушный компрессор. Воздушный компрессор качает воздух в воздушные резервуары. Компрессор может охлаждаться воздухом или системой охлаждения двигателя.

Воздушный регулятор компрессора. Регулятор управляет подачей воздушным компрессором воздуха в резервуары. Когда давление в резервуаре достигает граничного значения, регулятор отключает компрессор, а когда давление в резервуаре меньше нижней границы регулятор включает компрессор.

Воздушные резервуары. Воздушные резервуары используются для удержания воздуха. Число и размер воздушных резервуаров изменяется в зависимости от транспортного средства. Резервуары содержат достаточно воздуха, чтобы использовать тормоза несколько раз, даже если компрессор прекратит работать.

Педаля тормоза. Нажатие педали изменяет давление воздуха. Ослабление педали тормоза уменьшает давление воздуха и отпускает тормоза.

Тормозные диски. В пневматических тормозах, давление воздуха действует на тормозную камеру и диск прижимается к колесу.

1.1.6 Гидравлическая тормозная система

В системах АБС, которые имеют обычный главный цилиндр и вакуумный усилитель, установлен маленький аккумулятор или пара



Рис. 1.5: Пневматическая тормозная система

аккумуляторов, они могут использоваться как временные резервуары для тормозной жидкости в течение цикла переключения. Этот тип аккумулятора обычно использует диафрагму, для сохранения давления.

На некоторых системах АБС используется электрический насос высокого давления, чтобы обеспечить нормальное торможение так же как восстановление давления торможения в течение работы АБС. В некоторых системах, это используется только в течение торможения АБС.

Двигатель насоса запитан через реле, которое переключает модуль управления АБС. Давление, которое производится насосом, сохранено в "аккумуляторе" или центральном резервуаре.

Гидравлический модулятор содержит соленоидальные клапаны АБС для каждого тормозного контура управления. Число клапанов в контуре зависит от типа системы АБС. Некоторые имеют пару релейных соленоидальных клапанов для каждого тормозного контура, а другие используют единственный клапан, который может принимать несколько положений. Иногда маленькие электрические двигатели используются вместо соленоидов, чтобы заставить перемещаться поршни вверх и вниз модулировать давление при торможении [18].

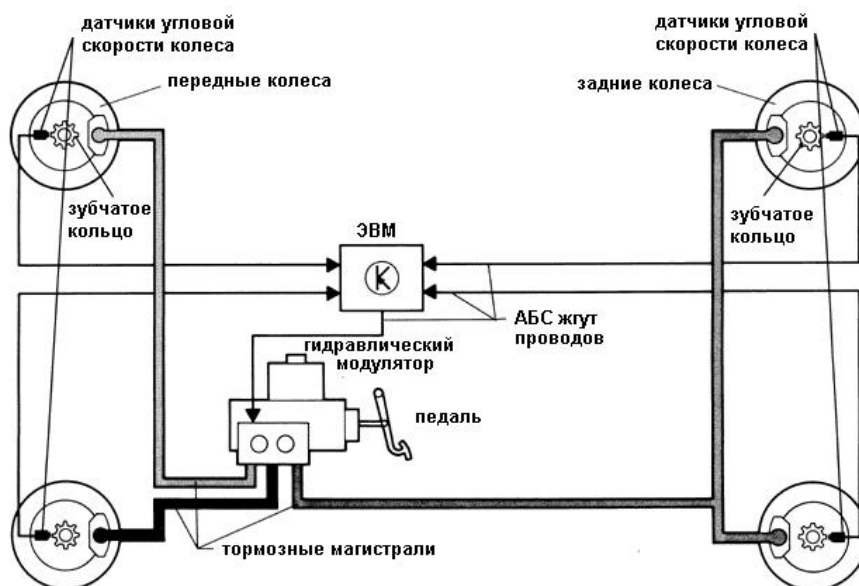


Рис. 1.6: Диаграмма блоков АБС

1.1.7 Силы, действующие при проскальзывании колес

Основой для стабилизации автомобиля является представление об отношении между продольной касательной составляющей контактной силы колеса P_x , нормальной составляющей контактной силы N и коэффициента сцепления μ :

$$P = \mu N$$

Коэффициент сцепления определяется семейством $\mu(s)$ (см. рис. 1.7), где $s = \frac{V_{отн}}{V}$ - относительное проскальзывание. Здесь $V_{отн}$ - скорость проскальзывания колеса относительно дороги, V - продольная скорость оси колеса [30], [31].

На величину $\mu(s)$ влияют такие факторы как: состояние дороги (профиль, свойства опорной поверхности); погодные условия; состояние шины; продольная скорость автомобиля; углы увода

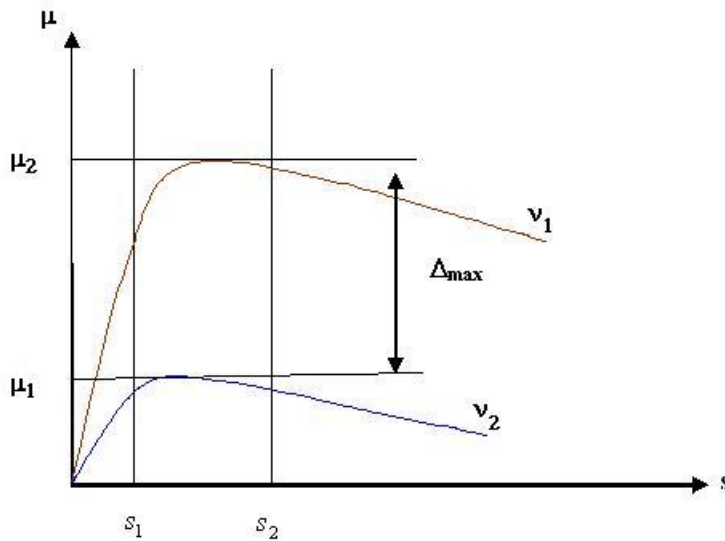


Рис. 1.7: Цикл ABS

колес и другие. Поэтому диаграммы $\mu(s)$ задаются семейством характеристик со значительной неопределенностью [7], и управление автомобилем осуществляется с учетом этой неопределенности. В существующих системах стабилизации с ABS это обстоятельство не учитывается, а используются оценки для конкретных поверхностей разных фиксированных типов, что сужает возможности управления для поверхностей, обладающих более сложными неопределенными свойствами, изменяющимися по ходу движения.

Часто, вместо $\mu(s)$ -характеристики используют ее приближение в виде $\mu(s) = \nu\varphi(s)$. Здесь $\varphi(s)$ единая приближенная кривая, максимум которой равен 1, а ν коэффициент трения для пары колесо-дорога.

На рис. 1.7, (1) принадлежит сухому асфальту (с коэффициентом трения $\nu_1 \approx 0.8$) а (2) льду (с коэффициентом трения $\nu_2 \approx 0.2$), Δ_{max} - неопределенность коэффициента сцепления для поверхности "микст".

1.1.8 Цикл работы ABS

Когда водитель нажимает педаль, тормозная система с ABS начинает работать как обычная тормозная система до тех пор, пока

не возникает опасность блокировки колеса. В принципе датчики должны быть способными оценить угловую скорость колеса и продольную скорость автомобиля, то есть, получить информацию о проскальзывании, но, оценить продольную скорость трудно. Системы АБС обычно работают только с информацией об угловой скорости. Быстрое падение угловой скорости вращения колеса соответствует опасности блокировки колеса в общем случае, когда угловая скорость вращения одного или нескольких колес значительно меньше по сравнению с другими колесами, это значит колесо может заблокироваться, тогда начинает работать АБС.

Упрощенно цикл работы АБС состоит из двух процессов: заполнение и выпуск (торможение и растормаживание)

Заполнение: Водитель нажимает педаль и тормозной клапан открывается. Воздух проходит из главного резервуара в тормозной цилиндр. Вследствие этого давление в тормозном цилиндре возрастает, тормозной диск прижимается к ободу и момент торможения также возрастает. Продольная контактная сила возрастает и приближается к максимальному значению. Это нежелательно, потому что автомобиль уязвим для любых боковых сил. Такое поведение продолжается до тех пор пока отсутствует опасность блокировки колеса (см. рис. 1.8 область 1).

Выпуск: Когда система обнаруживает, что существует опасность блокировки колеса, она переключает тормозной клапан. Воздух в тормозном цилиндре выпускается в атмосферу, давление воздуха уменьшается до значения атмосферного давления. Тормозной диск отпускается и тормозной момент уменьшается. Колесо свободно вращается и продольная контактная сила также уменьшается, в результате колесо не блокируется. Угловая скорость вращения колеса возрастает, так как нет сил препятствующих вращению колеса (см. рис. 1.8 область 2).

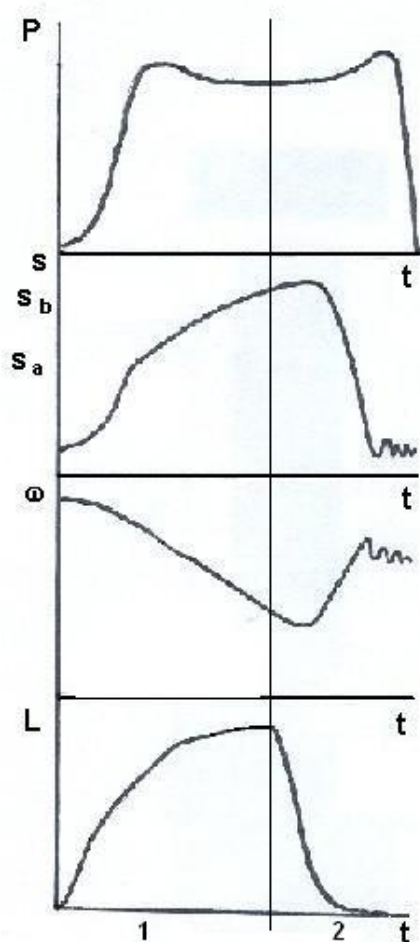


Рис. 1.8: Цикл АБС

На рис. 1.9 показан обычный график изменения скорости колеса во время торможения автомобиля при работе АБС. Когда водитель нажимает тормозную педаль, момент торможения возрастает и скорость колес уменьшается в район (1) на рисунке 1.9. Если водитель тормозит сильнее, или дорога скользкая, то скорость одного или нескольких колес начинает быстро падать (2). Это значит у колеса превышено максимальное значение коэффициента торможения $\varphi(s)$ и оно может блокироваться. Тогда АБС отпускает тормоза у таких колес во избежание блокировки (3). Когда скорость колеса возрастает снова, процесс повторяется. Локальной целью АБС можно считать удержание динамики каждого колеса вокруг максимального значения

коэффициента торможения, как показано на рис. 1.10 [24].

Однако при отсутствии дополнительных измерительных датчиков продолжительность цикла требуется ограничить во времени для того, чтобы во время растормаживания по угловой скорости вращения колес определять продольную скорость автомобиля и не допускать перегрева исполнительных механизмов.

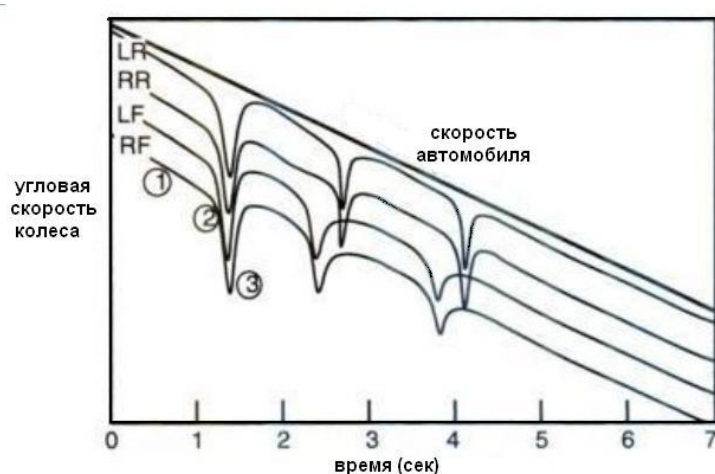


Рис. 1.9: Цикл скорости колеса во время работа АБС



Рис. 1.10: Процесс АБС достижения максимальной силы торможения

1.2 Некоторые особенности алгоритмов управления АБС

Есть много работ о моделировании и управлении систем АБС. В работе Магомедова [7] предлагаются новые варианты методов синтеза систем управления. Основные результаты следующие:

- Предложены упрощенные математические модели движения колесно-транспортного средства и проведено их обоснование с использованием методов фракционного анализа.
- Разработаны теоретические основы проектирования антиблокировочной системы стабилизации колесно-транспортного средства как системы с неопределенными параметрами. Рассматривается циклическое управление АБС, аналогичное рассмотренному в предыдущем параграфе и для разных этапов цикла управления строится специфический регулятор, использующий принципы либо адаптивного, либо робастного управления в зависимости от представлений о погрешностях определения величины относительного проскальзывания.
- Разработана методика проектирования и полунатурного моделирования предложенной системы управления.
- Проведены ходовые испытания разработанной системы управления колесно-транспортным средством.

В работе Denny [21] обсуждаются проблемы анализа нелинейной динамики торможения автомобиля. Нелинейность возникает при моделировании силы в контакте шины и дорожной поверхности от скорости автомобиля и угловой скорости вращения колеса. Показано, как

антиблокировочные тормозные системы приближаются к оптимальной тормозной характеристике (Продольная контактная сила остается в окрестности максимального значения). Приводятся следующие результаты работы.

- Проведен анализ нелинейной динамики тормозной системы без АБС при продольном движении автомобиля. Рассмотрено только одно колесо. Учтено проскальзывание в результате использования зависимости момента силы торможения с гистерезисом.
- Анализ нелинейной динамики тормозной системы с АБС проведен при тех же самых условиях, что и без АБС. Система АБС работает следующим образом: момент торможения имеет два значения L_{min} (минимальное) и L_{max} (максимальное), переключения происходят так:

$$\begin{cases} L \rightarrow L_{min} & \text{если } L = L_{max} \\ L \rightarrow L_{max} & \text{если } L = L_{min} \end{cases}$$

где $\ddot{\omega}$ - угловое ускорение вращения колеса, оно всегда отрицательно.

- Сравнения между системами с АБС и без АБС показывает, что АБС уменьшает расстояние торможения при малых значениях коэффициента трения.

Ünsal и Pushkin [32] описывают нелинейную систему для управления тягой автомобиля по показанном наблюдателя. На первом этапе в работе, построен алгоритм управления в скользящем режиме, а потом, в цепи обратной связи, использована оценка скорости автомобиля полученная с помощью нелинейного наблюдателя. Получены следующие результаты.

- Построено управление со скользящим режимом в обратной связи системы. Управление содержит значение проскальзывания вокруг выбранного значения.

- Построено управление со скользящим режимом и цепи обратной связи использовался нелинейный наблюдатель (расширенный фильтр Калмана).
- Построено управление со скользящим режимом и нелинейный наблюдатель (скользящий наблюдатель).

$$\dot{\hat{x}} = \hat{f}(\hat{x}, t) - HC(\hat{x} - x) - KI_s$$

где H, K - матрицы усиления.

- Экспериментальные результаты показывают, что расширенный фильтр Калмана не обнаруживает непредсказуемые изменения условий дороги, а система со скользящим наблюдателем является робастной при ограниченном изменении ошибок моделирования

Ming-Chin [29] рассматривает моделируемую и экспериментальную системы АБС. Построена нелинейная математическая модель антиблокировочной тормозной системы и выполнено моделирование. Построены и проверены два управления со скользящим режимом, одно использует модуляцию ширины импульса, а другое управление переключением. Результаты работы следующие

- Была построена математическая модель автомобиля для прототипа в лаборатории. Модель включает тормозную педаль, тормозную систему с усилителем, главный тормозной цилиндр, регулятор гидравлического давления, резервуар нижнего давления, масляный насос, силу сцепления между шиной и дорогой, модель корпуса автомобиля для одного колеса.
- Построено управление АБС, как режим с переключениями

$$U_0 = \begin{cases} 1 & , \text{если } S_{slide} > 0 \\ -1 & , \text{если } S_{slide} < 0 \end{cases}$$

где $S_{slide} = E_{slip} + \lambda \dot{E}_{slip}$. Здесь λ - строго положительная постоянная, $E_{slip} = s - s^*$, s^* - заданное значение проскальзывания.

- Построено управления АБС с помощью модуляции ширины импульса в скользящем режиме

$$U_0 = \frac{S_{slide}}{\Phi}$$

и

$$U_0 = \begin{cases} 1 & \text{если } S_{slide} > 1 \\ -1 & \text{если } S_{slide} < -1 \end{cases}$$

где S_{slide} - индекс режима скольжения и зависит от проскальзывания и Φ - ширина импульса.

- Сравнение между системами показывает, что управление модуляцией ширины импульса хорошо исключает дрожание в системе.
- Сравнение между экспериментальными результатами и компьютерным моделированием показывает правильность математической модели.

Работа Тог и другие [35] описывает проблему управления АБС, с обсуждением по гибридным аспектам управления (под гибридными понимают дискретное управление непрерывной динамикой). Главный результат следующий

- Показаны экспериментальные результаты для двух алгоритмов управления: LQR с ограничениями и нелинейное управление на основе функций Ляпунова. Реализация таких алгоритмов оказалась проще, чем другие способы, а эффективность была такой же, как и у промышленных систем АБС.

Solyom и Rantzer [33] построили алгоритм управления типа "gainscheduled", который регулирует проскальзывание шин. Целью управления

является слежение за изменением проскальзывания шины для каждого из колес. Описаны следующие результаты.

- Скорость автомобиля оценивается с помощью фильтра Калмана. Были построены два локальных управления типа PI. Коэффициенты усиления этих управлений меняются согласно с проскальзыванием шины, продольной скоростью автомобиля v и максимальным коэффициентом трения ν_H .

Масиуса и другие [28] рассмотрели тормозную систему в рамках проекта, позволяющего удерживать постоянное расстояние между машинами на шоссе.

- Математическая модель была построена исходя из [27], [20], она состоит из силовой передачи и модифицированной тормозной системы. Так как главная здесь тормозная система, силовую передачу моделировали упрощенно.
- Построено скользящее управление.

В работе El Hadri и другие [22] рассматривается проблема оптимального управления ABS. Для этого необходимо оценить коэффициент трения, и с использованием этой оценки построить алгоритм управления ABS так, чтобы усилие было максимальным, то есть величина относительного проскальзывания s была такова, что характеристика $\varphi(s)$ принимала максимальные значения.

- Описывается продольная динамика автомобиля для одного колеса, предлагается модель динамики шина-дорога с двумя параметрами.

$$F_x = \nu\varphi(s\theta)$$

где F_x - продольная контактная сила, ν - неизвестный коэффициент трения и $\varphi(s\theta)$ - функция общей модели шины с номинальным местоположением максимального значения (θ - неизвестный параметр).

- Нелинейный наблюдатель скользящего режима был построен для оценки F_x с помощью уравнения динамики вращения колеса по измерениям скорости вращения колеса. Наблюдатель имеет следующий вид [37]:

$$\dot{\hat{\omega}} = \frac{L}{I} + G \text{sign}(\omega - \hat{\omega}).$$

Здесь L - момент торможения, I - момент инерции колеса и G - исходное усилие. Оценка продольной контактной силы получена для скользящего режима $\dot{\omega} = 0$ в виде

$$\tilde{F}_x = -\frac{I}{R}\hat{\omega}.$$

Здесь R - радиус колеса и $\hat{\omega}$ получено из

$$\dot{\hat{\omega}} = -\hat{\omega} + G \text{sign}(\omega - \hat{\omega})$$

- Наблюдатель для оценки $\hat{\nu}$ и $\hat{\theta}$ величин ν и θ построен следующим образом

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\nu}} \\ \dot{\hat{\theta}} \end{bmatrix} = M^{-1}(s, \hat{\nu}, \hat{\theta}) \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \text{sign}(\bar{y}_1),$$

где

$$M(s, \hat{\nu}, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} \varphi(s\hat{\theta}) & \hat{\nu} \frac{\partial \varphi(s\hat{\theta})}{\partial s} s \\ \frac{\partial \varphi(s\hat{\theta})}{\partial s} \hat{\theta} & \hat{\nu} \frac{\partial^2 \varphi(s\hat{\theta})}{\partial s^2} s \hat{\theta} + \hat{\nu} \frac{\partial \varphi(s\hat{\theta})}{\partial s} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{y}_1 = \nu \varphi(s\theta) - \hat{\nu} \varphi(s\hat{\theta}).$$

- Построено управление со скользящим режимом, которое позволяет обеспечить искомое проскальзывание колеса s [37].

В работах П.А. Кручинина и других [4], [5] рассматривается задача оптимального подавления паразитных колебаний при работе антиблокировочной системы автомобиля.

- Построена математическая модель, описывающая паразитные

колебания, которые возникают при резких изменениях тормозного момента во время работы АБС на этапе растормаживания колеса (при значениях тормозного момента близких к 0).

- Построено управление, удовлетворяющее принципу максимума Понтрягина, переводящее систему из заданной точки пространства состояний на многообразии $\frac{d\omega}{d\tau} = 0$, $\frac{df}{d\tau} = 0$ за минимальное время.
- Численное моделирование и практика проектирования подтверждают справедливость результатов.

В работе Гоздек и Гончаренко [1] показана необходимость обеспечивать устойчивость механической системы, которая состоит из колес, тормозной системы и автоматической системы управления торможением самолета. В работе рассматривается возбуждение колебаний стойки колес самолета при работе АБС

- Отмечено, что значительное усиление амплитуд колебаний (в 5-10 раз) происходит в окрестности резонансной частоты колебания стойки шасси, причем входной сигнал $\Delta U_{\text{вх}}$ системы управления и тормозной момент ΔM_T находятся в противофазе.
- На качественном уровне исследованы принципы появления этих колебаний и сделаны предложения о фильтрации сигнала для обеспечения выполнения условия устойчивости.

Приведенный анализ литературы показывает, что представляет интерес исследование двух взаимосвязанных задач. Первая из них связана с описанием колебательных процессов при работе антиблокировочной системы автомобиля. Если вопрос о развитии колебаний для состояний колеса близких к движению без проскальзывания исследовали достаточно подробно, то колебательные процессы для колес в режимах с проскальзыванием ранее подробно не рассматривались. Вторая задача связана с удержанием движения

колеса в окрестности максимума $\varphi(s)$ характеристики при торможении. Эта задача решалась в предположении о наличии оценок для величины относительного проскальзывания s и при наличии хорошей информации о свойствах дорожной поверхности. Реальная информация о этих величинах часто бывает неточна. В этих условиях представляет интерес решение задачи о возможности организации устойчивых периодических режимов в окрестности максимальной величины контактной силы.

Решению этой задачи и будет посвящена предлагаемая работа.

Глава 2

Математическая модель движения колес, снабженных АБС.

2.1 Уравнения движения автомобиля.

Задача моделирования движения автомобиля широко освещена в современной литературе. Достаточно полные модели движения автомобиля представлены в работах [14], [15], [20], [24], [27], [36].

Для описания движения автомобиля возьмем за основу модель работы [7], ранее уже успешно использованную для разработки и анализа движения автомобиля с АБС. Изложим основы этой модели, уточнив некоторые особенности, которыми предшествующие авторы пренебрегали без должного обоснования.

2.1.1 Системы координат и переменные.

Будем считать, что движение автомобиля происходит по горизонтальной опорной поверхности.

Введем следующие системы координат: $O\xi\eta\zeta$ - неподвижная. Плоскость $O\xi\eta$ совпадает с опорной плоскостью, ось $O\zeta$ вертикальна, $O\xi$ - направлена вперед по ходу движения.

Положение центра масс C автомобиля задается декартовыми координатами X, Y, Z в системе $O\xi\eta\zeta$.

Система $Cx_0y_0z_0$ - с началом в центре масс. Ось Cz_0 вертикальна, ось Cx_0 лежит в продольной плоскости симметрии корпуса. Система $Cx_0y_0z_0$ может быть получена из $O\xi\eta\zeta$ в результате переноса в точку C осей и поворота их на ψ - вокруг оси ζ . Угол ψ является курсовым углом автомобиля.

Система $Cxyz$ - связана с корпусом и совпадает с его главными центральными осями инерции. Переход от осей $Cx_0y_0z_0$ к осям $Cxyz$ задается двумя малыми углами поворота вокруг осей x и y ; крена γ и тангажа ϑ .

Системы $A_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ - связаны с дисками колес. Индексы "i" задают переднюю ($i = 1$) и заднюю ($i = 2$) оси, индексы "j" - левую ($j = 1$) и правую ($j = 2$) стороны по ходу движения. Точка A_{ij} лежит на пересечении оси вращения ij -го колеса с плоскостью продольной симметрии, плоскость $A_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ совпадает с этой плоскостью, ось $A_{ij}y_{ij}$ совпадает с осью вращения колеса, ось $A_{ij}x_{ij}$ горизонтальна. В пренебрежении углами развала и схождения оси трехгранников $A_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ для задних колес ориентированы по осям трехгранника $Cx_0y_0z_0$.

В ненагруженном силой веса и инерционными силами состоянии каждое колесо касается опорной плоскости в единственной точке O_{ij} . Эта точка в системе $A_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ задается координатами $(0, 0, -R)$, где R - радиус колеса.

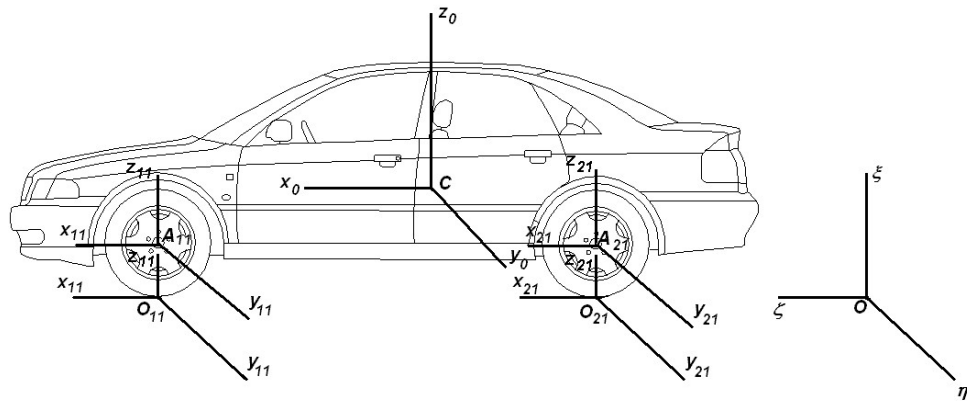
При нагружении контактная область из точки превращается в пятно. Отображение в данный момент времени точки O_{ij} на опорную плоскость называется центром пятна контакта. Положение точки O_{ij} в системе $A_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ задается при возмущенном состоянии координатами $(\xi_{ij}, \eta_{ij}, -R + \zeta_{ij})$.

Система $O_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ с началом в точке O_{ij} . Плоскость $O_{ij}x_{ij}y_{ij}$ совпадает с опорной, ось $O_{ij}x_{ij}$, ориентирована по касательной в точке O_{ij} к проекции средней линии пневматика на опорную плоскость.

В пренебрежении угловой деформацией пневматика при верчении ориентацию $O_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ будем считать совпадающей с ориентацией $A_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$.

Предполагается, что деформированное состояние пневматика задается конечным числом малых переменных $\check{\xi}_{ij}, \check{\eta}_{ij}, \check{\zeta}_{ij}$ - перемещений центра пятна контакта вдоль осей $A_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$.

Вращение ij -го колеса вокруг своей оси вращения $A_{ij}y_{ij}$ задается абсолютной угловой скоростью Ω_{ijy} .



2.1.2 Динамические уравнения движения автомобиля в целом

Для механической системы автомобиля в целом [7].

Предполагаем, что движение происходит только в плоскости x_0y_0 .

Уравнения движения центра масс автомобиля, в осях трехгранника $Cx_0y_0z_0$ запишем в виде

$$M \frac{dV_x}{dT} = \sum_{i,j=1}^2 P_{ijx} + MV_y \Omega_z + F_{a_x}, \quad (2.1)$$

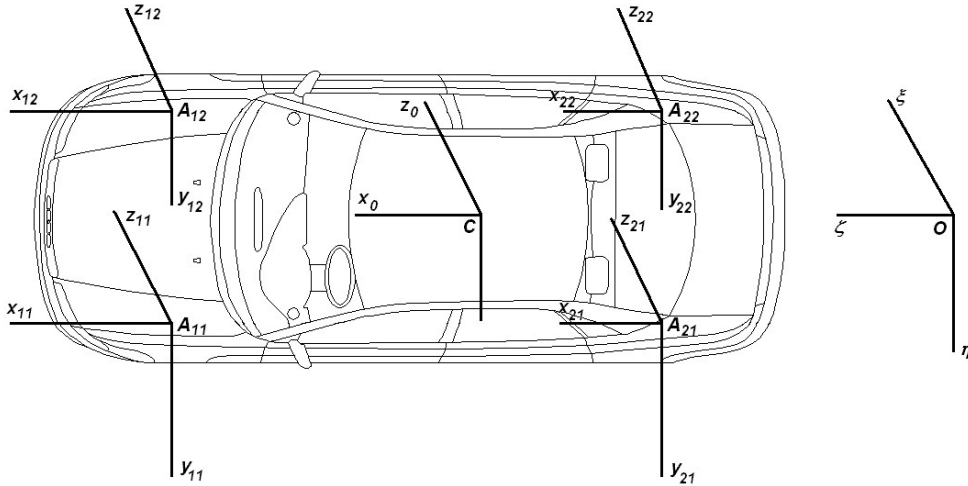


Рис. 2.1: Системы координат

$$M \frac{dV_y}{dT} = \sum_{i,j=1}^2 P_{ijy} - MV_x \Omega_z + F_{a_y}. \quad (2.2)$$

$$M \frac{dV_z}{dT} = \sum_{i,j=1}^2 N_{ij} - Mg. \quad (2.3)$$

Здесь T - время, M - полная масса автомобиля с колесами, (V_x, V_y, V_z) - проекции на оси $Cx_0y_0z_0$ соответственно векторов абсолютной скорости точки C , Ω_z - проекция на вертикальную ось абсолютной угловой скорости трехгранника $Cx_0y_0z_0$, Mg - сила тяжести, $(P_{ijx}, P_{ijy}, N_{ij})$ - проекции контактной силы и нормальная реакция, $(MV_y \Omega_z, -MV_x \Omega_z, 0)$ - проекции сил инерции, (F_{a_x}, F_{a_y}) - проекции аэродинамической силы.

Уравнения изменения кинетического момента автомобиля в целом относительно точки C в проекциях на оси трехгранника $Cx_0y_0z_0$ [9] при отсутствии отрыва колес от дороги имеют вид

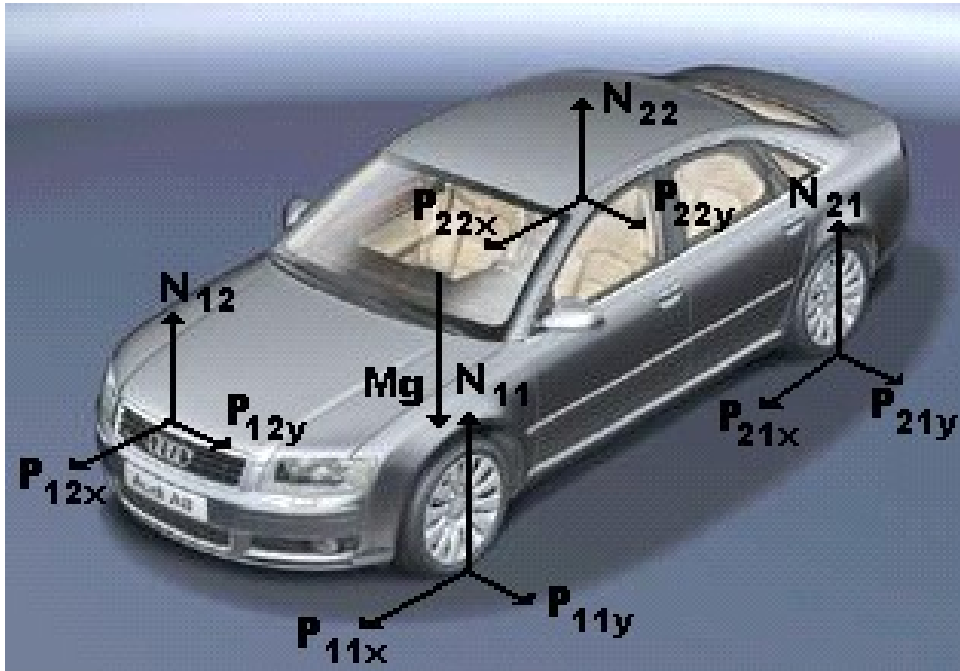


Рис. 2.2: Силы действующие на автомобиль

$$I_x \frac{d\Omega_x}{dT} = [(N_{11} + N_{21}) - (N_{12} + N_{22})]B - \left(\sum_{i,j=1}^2 P_{ijy} \right) Z - \sum_{j=1}^2 I_{1j} \left[\dot{\Omega}_{1j} \sin\theta + \Omega_{1j} \dot{\theta} \cos\theta - \Omega_{1j} \Omega_z \cos\theta \right], \quad (2.4)$$

$$I_y \frac{d\Omega_y}{dT} = (N_{21} + N_{22})A_2 - (N_{11} + N_{12})A_1 - \left(\sum_{i,j=1}^2 P_{ijx} \right) Z - \sum_{j=1}^2 I_{1j} \left[\dot{\Omega}_{1j} \cos\theta - \Omega_{1j} \dot{\theta} \sin\theta + \Omega_{1j} \Omega_z \sin\theta \right] - \sum_{j=1}^2 I_{2j} \dot{\Omega}_{2j}, \quad (2.5)$$

$$I_z \frac{d\Omega_z}{dT} = [(P_{12x} + P_{22x}) - (P_{11x} + P_{21x})]B + (P_{11y} + P_{12y})A_1 - (P_{21y} + P_{22y})A_2. \quad (2.6)$$

Здесь учитывалось, что $\vec{k}_{ij} = (I_{ij}\Omega_{ij}\sin\Theta, I_{ij}\Omega_{ij}\cos\Theta, 0)^T$ - кинетический момент колеса.

Учитывается, что скорость изменения кинетического момента колеса равна

$$\frac{d\vec{k}_{ij}}{dt} = \begin{pmatrix} I_{ij}\dot{\Omega}_{ij}\sin\Theta + I_{ij}\Omega_{ij}\dot{\Theta}\cos\Theta - I_{ij}\Omega_{ij}\Omega_z\cos\Theta \\ I_{ij}\dot{\Omega}_{ij}\cos\Theta - I_{ij}\Omega_{ij}\dot{\Theta}\sin\Theta + I_{ij}\Omega_{ij}\Omega_z\sin\Theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

и пренебрегается изменением развала колес.

Изменением кинетического момента в результате движения центра масс колеса при повороте вокруг оси будем пренебрегать вследствие его малости [9],[16].

2.1.3 Кинематические уравнения движения автомобиля

Запишем кинематические уравнения в виде:

$$\frac{dX}{dT} = V_x \cos \psi - V_y \sin \psi, \quad (2.8)$$

$$\frac{dY}{dT} = V_x \sin \psi + V_y \cos \psi, \quad (2.9)$$

$$\frac{dZ}{dT} = V_z, \quad (2.10)$$

$$\frac{d\psi}{dT} = \Omega_z, \quad (2.11)$$

и уравнения для угловых скоростей в линейном приближении,

$$\frac{d\gamma}{dT} = \Omega_x, \quad \frac{d\vartheta}{dT} = \Omega_y. \quad (2.12)$$

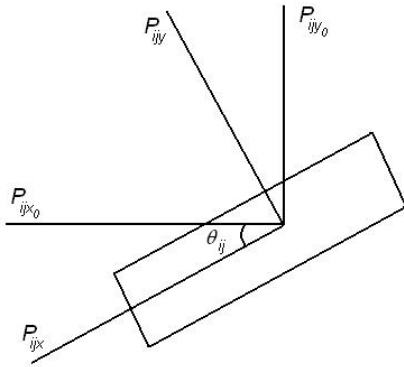


Рис. 2.3: Проекция контактной силы

2.1.4 Соотношения для сил в контакте колеса с дорогой

Силы контактного взаимодействия задаются далее в осях трехгранников $Ox_{ij}y_{ij}z_{ij}$ своими проекциями P_{ijx}, P_{ijy}, N_{ij} . Их связь с проекциями в осях трехгранника $Cx_0y_0z_0$ из (2.1) - (2.3) и (2.11) - (2.10) дается соотношениями

$$P_{11x_0} = P_{11x} \cos \Theta_{11} - P_{11y} \sin \Theta_{11}, \quad (2.13)$$

$$P_{11y_0} = P_{11x} \sin \Theta_{11} + P_{11y} \cos \Theta_{11}, \quad (2.14)$$

$$P_{12x_0} = P_{12x} \cos \Theta_{12} - P_{12y} \sin \Theta_{12}, \quad (2.15)$$

$$P_{12y_0} = P_{12x} \sin \Theta_{12} + P_{12y} \cos \Theta_{12}, \quad (2.16)$$

$$P_{21x_0} = P_{21x}, P_{21y_0} = P_{21y}, P_{22x_0} = P_{22x}, P_{22y_0} = P_{22y} \quad (2.17)$$

На рис. 2.4 приведена схема сил взаимодействия в элементах подвески. Рассмотрим механическую систему, которая включает в себя деформируемую часть пневматика колеса, непосредственно примыкающую к опорной поверхности. Эту систему будем называть контактным элементом [3].

2.1.5 Модель движения контактного элемента

В отличие от предшествующих работ запишем уравнения движения контактного элемента в проекциях на оси трехгранника $Ox_{ij}y_{ij}z_{ij}$

$$M_c \frac{d}{dt} (V_x + \Omega_{ij} R + \dot{\xi}_{ij}) = -C_x \frac{d\check{\xi}_{ij}}{dT} - K_x \check{\xi}_{ij} + P_{ijx} \quad (2.18)$$

$$M_c \frac{d}{dt} (V_y + \dot{\eta}_{ij}) = -C_y \frac{d\check{\eta}_{ij}}{dT} - K_y \check{\eta}_{ij} + P_{ijy}, \quad (2.19)$$

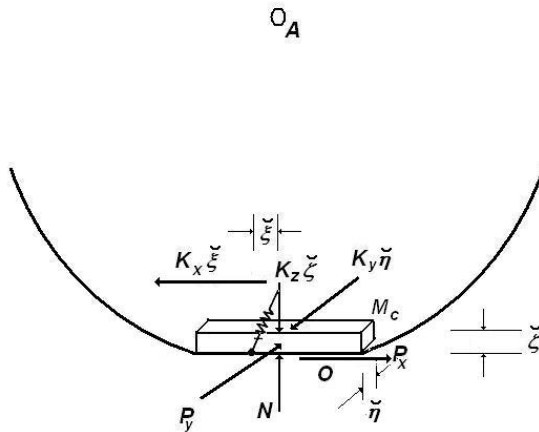


Рис. 2.4: Схема сил взаимодействия в элементах подвески

$$0 = -C_z \frac{d\check{\zeta}_{ij}}{dT} - K_z \check{\zeta}_{ij} + N_{ij}. \quad (2.20)$$

Здесь P_{ijx} , P_{ijy} , N_{ij} - проекции вектора касательных и нормальных сил, приложенных к контактному элементу со стороны опорной поверхности, $-K_x \check{\xi}_{ij}$, $-K_y \check{\eta}_{ij}$, $-K_z \check{\zeta}_{ij}$ - проекции вектора упругих сил, приложенных к контактному элементу со стороны основной недеформированной части пневматика, K_x , K_y , K_z - соответствующие коэффициенты упругости, $-C_x \frac{\check{\xi}_{ij}}{dT}$, $-C_y \frac{\check{\eta}_{ij}}{dT}$, $-C_z \frac{\check{\zeta}_{ij}}{dT}$ - проекции вектора сил вязкого трения, приложенных к контактному элементу, C_x , C_y , C_z - соответствующие коэффициенты демпфирования.

Здесь предполагается, что вертикальное перемещение контактного элемента отсутствует.

2.1.6 Уравнения вращательного движения колеса

Уравнение изменения момента количества движения описывает вращательное движение колеса [9].

$$I_j \frac{d\Omega_{ijy}}{dT} = -P_{ijx}(R - \check{\zeta}_{ij}) + L_{ij} \quad (2.21)$$

Здесь I_j - моменты инерции переднего (заднего) колес, L_{ij} - момент, приложенный к колесу со стороны системы "корпус плюс подвеска".

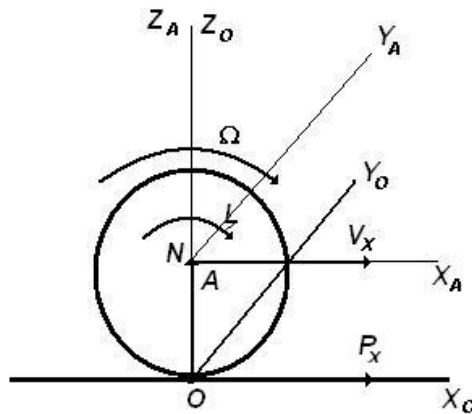


Рис. 2.5: Модель динамики колеса

2.1.7 Модель контактных сил

Изложим модель контактных сил в соответствии с результатами работы [13]. Относительным проскальзыванием назовем величину s .

$$s_{x_{ij}} = \frac{V_{Ox_{ij}}}{V_{Ax_{ij}}}, \quad (2.22)$$

$$s_{y_{ij}} = \frac{V_{Oy_{ij}}}{V_{Ax_{ij}}}, \quad (2.23)$$

где $V_{O_{ij}}$ - скорость центра контактного пятна, $V_{A_{ij}}$ - продольная скорость центр масс колеса.

$$V_{Ox_{ij}} = V_{Ax_{ij}} - \Omega_{ij}R + \dot{\xi}_{ij}, \quad (2.24)$$

$$V_{Oy_{ij}} = V_{Ay_{ij}} + \dot{\eta}_{ij}. \quad (2.25)$$

Подставим (2.24) и (2.25) в (2.22) (2.23), получим

$$s_{x_{ij}} = \frac{V_{Ax_{ij}} - \Omega_{ij}R + \dot{\xi}_{ij}}{V_{Ax_{ij}}}, \quad (2.26)$$

$$s_{y_{ij}} = \frac{V_{Ay_{ij}} + \dot{\eta}_{ij}}{V_{Ax_{ij}}}. \quad (2.27)$$

Для контактной силы имеем

$$\begin{aligned} P_{x_{ij}} &= -\nu N \frac{s_{x_{ij}}}{s_{ij}} \varphi(s_{ij}) \\ P_{y_{ij}} &= -\nu N \frac{s_{y_{ij}}}{s_{ij}} \varphi(s_{ij}), \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $s_{ij} = \sqrt{s_{x_{ij}}^2 + s_{y_{ij}}^2}$

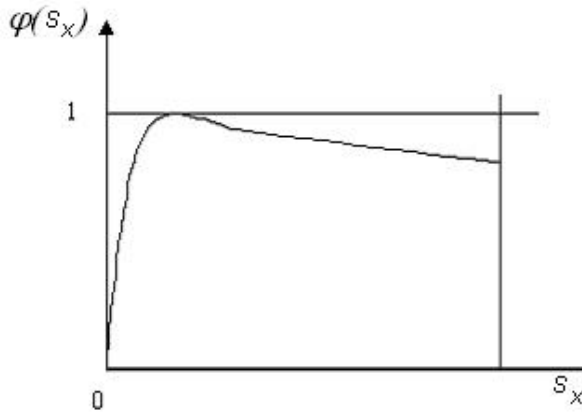
Функция $\varphi(s)$ определяется экспериментально и имеет вид, приведенный на рис. 2.6 [30].

Когда автомобиль движется только вдоль оси x , имеем $s_{y_{ij}} = 0$ и $P_{y_{ij}} = 0$. Тогда (2.28) принимает вид

$$P_{x_{ij}} = -\nu N \varphi(s_{x_{ij}}) \text{sign}(s_{x_{ij}}) \quad (2.29)$$

2.1.8 Модель вертикальных колебаний колеса

Рассмотрим механическую систему, составленную элементами подвески - от корпуса автомобиля до опорного элемента. Запишем уравнение

Рис. 2.6: Функция $\varphi(s_x)$

движения центра масс этой системы в проекции на вертикальную ось

$$m_A \frac{d^2 z_{Aij}}{dT^2} = N_{ij} + C_{jz} \Delta z_{ij} + D_j \frac{d\Delta z_{ij}}{dT} \quad (2.30)$$

Здесь m_A - приведенная масса системы, $z_{Aij} = R - \check{\zeta}_{ij} + const$ - координата ее центра масс, Δz_{ij} - деформация рессоры, D_j , C_j - приведенные коэффициенты демпфирования амортизаторов и жесткости рессор, вообще говоря, разные для передних и задних колес.

Запишем в линейном приближении соотношения, связывающие деформации с переменными, определяющими положение корпуса (рис. 2.4).

$$\begin{aligned} \Delta z_{11} &= A_1 \vartheta + B\gamma + \Delta z \\ \Delta z_{12} &= A_1 \vartheta - B\gamma + \Delta z \\ \Delta z_{21} &= -A_2 \vartheta + B\gamma + \Delta z \\ \Delta z_{21} &= -A_2 \vartheta - B\gamma + \Delta z \\ \Delta z &= Z - Z_0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Здесь Δz - поступательное смещение системы $Cx_0y_0z_0$ по вертикали от ее невозмущенного положения Z_0 .

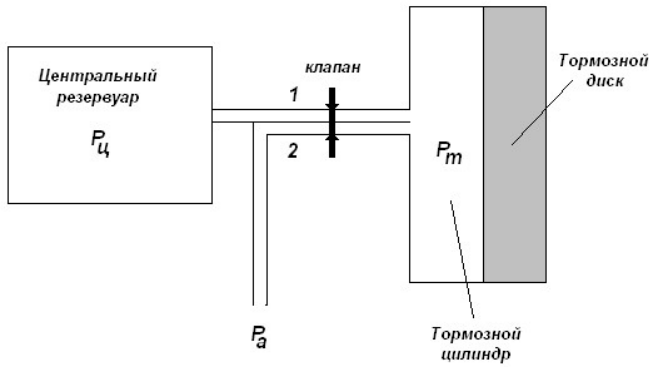


Рис. 2.7: Модель тормозной системы

2.1.9 Модель тормозной системы

Пневматическая тормозная система, (показана на рис. 2.7) имеет резервуары двух типов: центральный резервуар и рабочие тормозные цилиндры, к каждому рабочему цилиндру ведет два трубопровода: один (1) ведет из центрального резервуара в тормозной цилиндр, а другой (2) из тормозного цилиндра в атмосферу [5],[4]. Рассмотрим систему, в которой установлен один клапан, который открывает и закрывает попеременно каждый трубопровод. (Когда 1 открыт - 2 закрыт (заполнение) и когда 1 закрыт - 2 открыт (выпуск)).

Предполагается, что момент тормозных сил пропорционален давлению в тормозном цилиндре и направлен против угловой скорости вращения колеса

$$L_{ij} = -K_L P_{m_{ij}} \text{sign} \Omega_{ij}.$$

Используем приближенную модель изменения давления в тормозном цилиндре в виде динамического звена первого порядка [34].

$$\begin{cases} T_{e_{in}} \frac{dP_{m_{ij}}}{dT} + P_{m_{ij}} = P_{ц}(T + \Delta t_b) & \text{заполнение} \\ T_{e_{out}} \frac{dP_{m_{ij}}}{dT} + P_{m_{ij}} = P_a & \text{выпуск} \end{cases} \quad (2.32)$$

где $P_{m_{ij}}$ - давление на конце трубопровода, а T_e - постоянная времени

трубопровода и Δt_b - запаздывание во времени вследствие движения поршня.

2.2 Аппроксимация Паде для $\varphi(s)$ характеристики

Будем рассматривать поведение системы в области максимального значения тормозного момента, то есть, в районе максимума функции $\varphi(s)$, в диапазоне $0.12 \leq s \leq 0.52$. Этот диапазон соответствует снижению значений $\varphi(s)$ на 10% по сравнению с максимальными. Для этого предполагаем следующее приближение

$$\varphi(s) = \frac{a_1 s^2 + a_2 s + a_3}{s^2 + a_4 s + a_5} \quad (2.33)$$

Экспериментальные значения из [7] показаны в рис. 2.8 сплошной линией

Для определения значений коэффициентов a_i запишем выражение (2.33) в следующем виде

$$a_1 s_i^2 + a_2 s_i + a_3 - \varphi(s_i)(a_4 s_i + a_5) = \varphi(s_i) s_i^2$$

где через i обозначен номер экспериментальной пробы.

Тогда можем построить систему

$$PA = B,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} s_1^2 & s_1 & 1 & -\varphi(s_1) s_1 & -\varphi(s_1) \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ s_i^2 & s_i & 1 & -\varphi(s_i) s_i & -\varphi(s_i) \end{pmatrix}$$

Матрица P не квадратная, а ее размер зависит от количества экспериментальных проб.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_5 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \varphi(s_1)s_1^2 \\ \vdots \\ \varphi(s_i)s_i^2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить более аккуратное приближение в рассмотренной области, выбрано десять значений $\varphi(s)$ вокруг максимального значения.

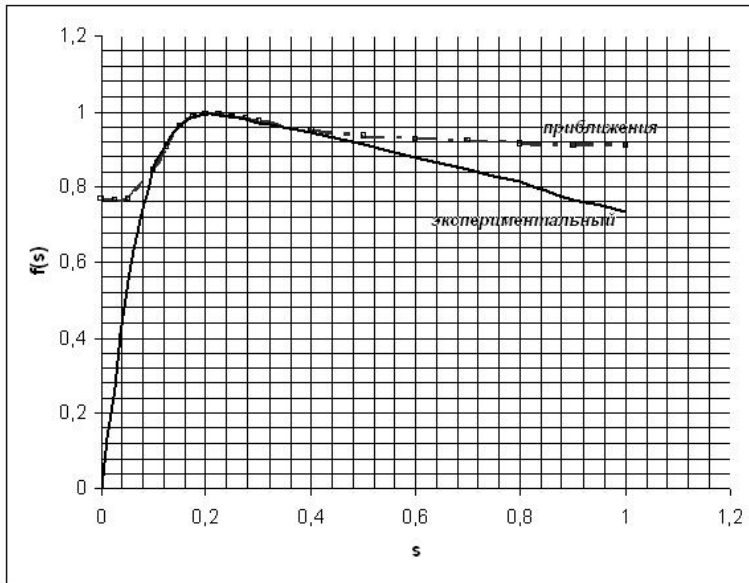


Рис. 2.8: Приближение функции $\varphi(s)$

Вычислим A из метода наименьших квадратов.

$$A = (P^T P)^{-1} P^T B. \quad (2.34)$$

Параметры равны:

$$a_1 = 0.8886$$

$$a_2 = -0.1776$$

$$a_3 = 0.0155$$

$$a_4 = -0.2226$$

$$a_5 = 0.0201$$

(2.35)

Для сравнения на рисунке 2.8 пунктирной линией приведены значения функции $\varphi(s)$, полученные по формуле (2.33) с вычисленными коэффициентами.

2.3 Полная система уравнений

Динамические уравнения

$$M \frac{dV_x}{dT} = \sum_{i,j=1}^2 P_{ijx} + MV_y \Omega_z + F_{a_x}$$

$$M \frac{dV_y}{dT} = \sum_{i,j=1}^2 P_{ijy} - MV_x \Omega_z + F_{a_y}$$

$$M \frac{dV_z}{dT} = \sum_{i,j=1}^2 N_{ij} - Mg$$

(2.36)

$$\begin{aligned}
I_x \frac{d\Omega_x}{dT} &= [(N_{11} + N_{21}) - (N_{12} + N_{22})]B - \left(\sum_{i,j=1}^2 P_{ijy} \right) Z \\
&\quad - \sum_{j=1}^2 I_{1jx} \left[\dot{\Omega}_{1jx} \sin \Theta_{1j} + \Omega_{1jx} \dot{\Theta}_{1j} \cos \Theta_{1j} - \Omega_{1jx} \Omega_z \cos \Theta_{1j} \right] \\
I_y \frac{d\Omega_y}{dT} &= (N_{21} + N_{22})A_2 - (N_{11} + N_{12})A_1 - \left(\sum_{i,j=1}^2 P_{ijx} \right) Z \\
&\quad - \sum_{j=1}^2 I_{1jy} \left[\dot{\Omega}_{1jy} \cos \Theta_{1j} - \Omega_{1jy} \dot{\Theta}_{1j} \sin \Theta_{1j} + \Omega_{1jy} \Omega_z \sin \Theta_{1j} \right] \\
&\quad - \sum_{j=1}^2 I_{2jy} \dot{\Omega}_{2jy} \\
I_z \frac{d\Omega_z}{dT} &= [(P_{12x} + P_{22x}) - (P_{11x} + P_{21x})]B + (P_{11y} + P_{12y})A_1 \\
&\quad - (P_{21y} + P_{22y})A_2
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Кинематические уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dT} &= V_x \cos \psi - V_y \sin \psi \\
\frac{dY}{dT} &= V_x \sin \psi + V_y \cos \psi \\
\frac{dZ}{dT} &= V_z \\
\frac{d\psi}{dT} &= \Omega_z
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\gamma}{dT} &= \Omega_x \\
\frac{d\vartheta}{dT} &= \Omega_y
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
P_{11x_0} &= P_{11x} \cos \Theta_{11} - P_{11y} \sin \Theta_{11}, \\
P_{11y_0} &= P_{11x} \sin \Theta_{11} + P_{11y} \cos \Theta_{11}, \\
P_{12x_0} &= P_{12x} \cos \Theta_{12} - P_{12y} \sin \Theta_{12}, \\
P_{12y_0} &= P_{12x} \sin \Theta_{12} + P_{12y} \cos \Theta_{12}, \\
P_{21x_0} &= P_{21x}, P_{21y_0} = P_{21y}, P_{22x_0} = P_{22x}, P_{22y_0} = P_{22y}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Вертикальные колебания

$$m_A \frac{d^2 z_{Aij}}{dT^2} = N_{ij} + C_{jz} \Delta z_{ij} + R_j \frac{d\Delta z_{ij}}{dT} \tag{2.41}$$

Уравнения вращательного движения колеса

$$I_j \frac{d\Omega_{ijy}}{dT} = -P_{ijx}(R - \check{\zeta}_{ij}) + L_{ij} \tag{2.42}$$

Движение контактного элемента

$$\begin{aligned}
M_c \frac{d}{dt}(V_x + \Omega_{ij} R + \check{\xi}_{ij}) &= -C_x \frac{d\check{\xi}_{ij}}{dT} - K_x \check{\xi}_{ij} + P_{ijx} \\
M_c \frac{d}{dt}(V_y + \check{\eta}_{ij}) &= -C_y \frac{d\check{\eta}_{ij}}{dT} - K_y \check{\eta}_{ij} + P_{ijy} \\
0 &= -C_z \frac{d\check{\zeta}_{ij}}{dT} - K_z \check{\zeta}_{ij} + N_{ij}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Контактная сила

$$\begin{aligned}
P_{x_{ij}} &= -\nu N_{ij} \frac{s_{x_{ij}}}{s_{ij}} \varphi(s_{ij}) \\
P_{y_{ij}} &= -\nu N \frac{s_{y_{ij}}}{s_{ij}} \varphi(s_{ij}) \\
s_{x_{ij}} &= \frac{V_x - \Omega_{y_{ij}} R + \dot{\xi}_{ij}}{V_x} \\
s_{y_{ij}} &= \frac{V_{Ay_{ij}} + \dot{\eta}_{ij}}{V_{Ax_{ij}}} \\
s_{ij} &= \sqrt{s_{x_{ij}}^2 + s_{y_{ij}}^2}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Модель тормозной системы

$$L_{ij} = -K_L P_{m_{ij}} \text{sign} \Omega_{ij} \tag{2.45}$$

$$\begin{cases} T_{e_{in}} \frac{dP_{m_{ij}}}{dT} + P_{m_{ij}} = P_{\Pi}(T + \Delta t_b) & \text{заполнение} \\ T_{e_{out}} \frac{dP_{m_{ij}}}{dT} + P_{m_{ij}} = P_a & \text{выпуск} \end{cases} \tag{2.46}$$

Полная система уравнений состоит из 32 дифференциальных уравнений, которые описывают: динамическое поведение корпуса, кинематическое поведение корпуса, деформации шин, вращение колес и изменение давления в модели тормоза.

Так как это сложная система, переменной структуры необходимо найти более простое приближение модели.

2.4 Фракционный анализ

2.4.1 Описание характерных постоянных времени задачи

Рассмотрим ряд вспомогательных задач, решение которых используем для ввода характерных постоянных времени [12].

Характерное время продольного движения автомобиля

Рассмотрим продольное движение автомобиля, боковых сил нет и система симметрична.

Из (2.1) имеем

$$M \frac{dV_x}{dT} = \sum_{i,j=1}^2 P_{ijx}.$$

Рассмотрим движение автомобиля в случае $P_{ijx} = P_*$ для всех i и j .

Уравнение примет вид

$$\frac{dV_x}{dT} = \frac{4P_*}{M}$$

и

$$V_x = \frac{4P_*}{M}(T - T_0) - V_{x_0}.$$

Тогда характерное время будет время при котором V_x вырастет с нуля до некоторого значения V_{x_*} , получим при $V_{x_0} = 0$, $T_0 = 0$ и $V_x = V_{x_*}$.

$$T_0 = \frac{MV_{x_*}}{4P_*}. \quad (2.47)$$

T_0 - это характерное время, за которое скорость автомобиля под действием силы порядка его веса $4P_* = Mg$ изменяется на величину порядка V_{x_*} .

Постоянная времени вертикальных колебаний корпуса

Рассмотрим упругие вертикальные колебания корпуса на рессорах, для этого примем модель показанную на рис. 2.9. Пренебрежем силами демпфирования передних и задних амортизаторов.

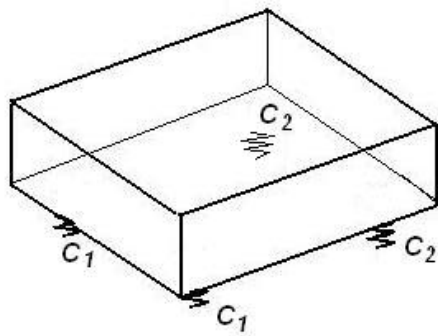


Рис. 2.9: Модель поступательных вертикальных колебаний корпуса

$$M \frac{d^2 z}{dT^2} = 2(C_1 + C_2)z - Mg \quad (2.48)$$

Перепишем

$$\frac{M}{2(C_1 + C_2)} \frac{d^2 z}{dT^2} = z - \frac{Mg}{2(C_1 + C_2)} \quad (2.49)$$

Примем за постоянную времени период колебаний кузова на рессорах

$$T_1 = \sqrt{\frac{M}{2(C_1 + C_2)}} \quad (2.50)$$

T_1 - постоянная времени поступательных упругих колебаний корпуса в рессорной подвеске.

Парциальная постоянная времени колебаний неподрессоренных масс за счет упругости пневматика и подвески

Рассмотрим вертикальные колебания колеса при неподвижном продольном движении автомобиля

Запишем уравнение вертикальных колебаний колеса из (2.41) при неподвижном корпусе и ровной дороге при отсутствии вязкости

$$m_A \frac{d^2 z_{Aij}}{dT^2} = K_z \check{\zeta}_{ij} + C_{jz} \Delta z_{ij}. \quad (2.51)$$

Поскольку $z_{Aij} = R - \check{\zeta}_{ij}$ и $\Delta z_{ij} = z_{Aij} - z_{Aij0}$ можем записать (2.51) как

$$m_A \frac{d^2 \check{\zeta}_{ij}}{dT^2} = -K_z \check{\zeta}_{ij} - C_{jz} \check{\zeta}_{ij}.$$

Тогда период вертикальных колебаний колес равен

$$T_2 = \sqrt{\frac{m_A}{K_z + C_{jz}}} \quad (2.52)$$

T_2 - период поступательных вертикальных колебаний неподрессоренных масс (колес, ступицы и элементов подвески) за счет упругости пневматика и рессор. За парциальную постоянную времени колебаний неподрессоренных масс при неподвижном кузове.

Оценка постоянной времени изменения угловой скорости колеса под действием продольной контактной силы

Рассмотрим движение колеса в продольном направлении. Считаем, что блокировки колеса и заноса нет, также деформируемая часть шины мала по сравнению с размером шины, автомобиль движется с постоянной скоростью V_{x*} , без вертикальных колебаний.

Из уравнений (2.4), (2.28), (2.29) получим

$$I_j \frac{d\Omega_{ijy}}{dT} = -P_{ijx} R + L_{ij}, \quad (2.53)$$

где

$$P_{ijx} = -\nu N_{ij} K_0 \varepsilon_{ijx}. \quad (2.54)$$

Перепишем

$$\frac{I_j V_{x*}}{RT_*} \frac{d\omega_{ijy}}{dt} = -R\nu N_* K_0 \varepsilon_{ijx} \sum_{i,j=1}^2 n_{ij} + L_{ij}, \quad (2.55)$$

$$\frac{I_j V_{x*}}{R^2 \nu N_* K_0 T_*} \frac{d\omega_{ijy}}{dt} = \varepsilon_{ijx} \sum_{i,j=1}^2 n_{ij} + L_{ij}, \quad (2.56)$$

$$\widehat{T}_3 = \frac{I_j V_{x*}}{R^2 \nu N_* K_0}. \quad (2.57)$$

\widehat{T}_3 - примем за оценку постоянной времени изменения угловой скорости колеса под действием контактной продольной силы.

Оценка парциальной постоянной времени изменения деформаций пневматика

Рассмотрим изменения деформаций пневматика, считаем, что вертикальных колебаний нет, боковых сил тоже нет. Движение происходит в продольном направлении. Примем: V_{ijx} и Ω_{ijy} постоянны.

Из уравнений (2.18), (2.28), (2.29), выделяя группу слагаемых с $\dot{\xi}_{ij}$, $\ddot{\xi}_{ij}$ получим

$$M_c \ddot{\xi}_{ij} = -K_x \ddot{\xi}_{ij} - C_x \dot{\xi}_{ij} + P_{ijx}, \quad (2.58)$$

где контактную силу для малых проскальзываний полагаем линейной

$$P_{ijx} = -\nu N_{ij} K_0 \left(\frac{V_{ijx} + \Omega_{ijy} R + \dot{\xi}_{ij}}{V_{ijx}} \right). \quad (2.59)$$

Тогда

$$M_c \ddot{\xi}_{ij} + C_x \dot{\xi}_{ij} + K_x \ddot{\xi}_{ij} = -\nu N_{ij} K_0 \left(\frac{V_{ijx} + \Omega_{ijy} R + \dot{\xi}_{ij}}{V_{ijx}} \right). \quad (2.60)$$

Перепишем

$$M_c \ddot{\xi}_{ij} + \left(C_x + \frac{\nu N K_0}{V_{ijx}} \right) \dot{\xi}_{ij} + K_x \xi_{ij} = -\nu N_{ij} K_0 \left(\frac{V_{ijx} + \Omega_{ijy} R}{V_{ijx}} \right). \quad (2.61)$$

Период изменения ξ равен

$$T_{char} = \frac{1}{\sqrt{\frac{K_x}{M_c} - \left(\frac{C_x V_{ijx} + \nu N K_0}{2M_c V_{ijx}} \right)^2}}. \quad (2.62)$$

Когда $\frac{K_x}{M_c} \gg \left(\frac{C_x V_{ijx} + \nu N K_0}{2M_c V_{ijx}} \right)^2$ можем записать

$$T_4 = \sqrt{\frac{M_c}{K_x}}. \quad (2.63)$$

Примем T_4 за оценку парциальной постоянной времени изменений деформаций пневматика.

Оценка парциальной постоянной времени изменения деформаций пневматика в поперечном направлении

Рассмотрим изменения деформаций пневматика, считаем, что вертикальных колебаний нет, внешних боковых сил тоже нет. Движение автомобиля происходит в продольном направлении. Продольное относительное проскальзывание отсутствует, а поперечное вызвано боковым сцеплением контактного элемента на величину $\check{\eta}$.

Из уравнений (2.19), (2.28), (2.29), выделяя группу слагаемых с $\dot{\check{\eta}}_{ij}$, $\check{\eta}_{ij}$ получим

$$M_c \ddot{\check{\eta}}_{ij} = -K_y \check{\eta}_{ij} - C_y \dot{\check{\eta}}_{ij} + P_{ijy}. \quad (2.64)$$

Для линейной части зависимости $\varphi(s)$

$$P_{ijy} = -\nu N_{ij} \frac{s_{yij}}{s_{ij}} \varphi(s_{ij}) = -\nu N_{ij} K_0 \dot{\eta}_{ij}, \quad (2.65)$$

тогда

$$M_c \ddot{\eta}_{ij} + C_y \dot{\eta}_{ij} + K_y \eta_{ij} = -\nu N_{ij} K_0 \dot{\eta}_{ij} \quad (2.66)$$

и период изменения $\dot{\eta}$

$$T_{char} = \frac{1}{\sqrt{\frac{K_y}{M_c} - \left(\frac{C_y + \nu N_{ij} K_0}{2M_c}\right)^2}}. \quad (2.67)$$

Поскольку $\frac{K_y}{M_c} \gg -\left(\frac{C_y + \nu N_{ij} K_0}{2M_c}\right)^2$ можем записать

$$T_5 = \sqrt{\frac{M_c}{K_y}}. \quad (2.68)$$

T_5 - оценка парциальной постоянной времени изменений деформаций пневматика в поперечном направлении.

Характерное время поперечных колебаний корпуса

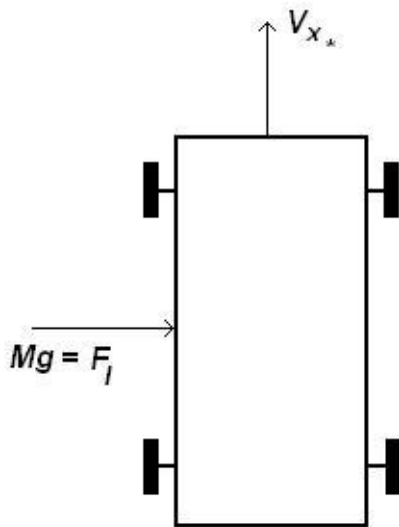


Рис. 2.10: Поперечные силы действующие на корпус

Рассмотрим поперечное движение экипажа в случае, когда боковые силы принимают значения на восходящем участке $\varphi(s)$ -характеристики (2.6), который мы будем приближенно моделировать линейной функцией

$$\varphi(s) = K_0 s \quad (2.69)$$

Считаем, что автомобиль движется поступательно и подвержен действию постоянной силы $F_l \sim Mg$.

Это выполняется при $V_y, \Omega_z(A_1 + A_2) \ll V_x$. Имеем

$$M \frac{dV_y}{dT} = \sum_{i,j=1}^2 P_{ijy} + F_l \quad (2.70)$$

В силу принятого предположения (2.69), $P_{ijy} = \nu N K_0 s_y$, то есть

$$M \frac{dV_y}{dT} = -\nu K_0 \frac{V_y}{V_{x*}} \sum_{i,j=1}^2 N_{ij} + Mg, \quad (2.71)$$

$$\frac{V_{x*}}{\nu g K_0} \frac{dV_y}{dT} + V_y = \frac{V_{x*}}{\nu K_0}. \quad (2.72)$$

Постоянная времени этого уравнения имеет вид

$$T_6 = \frac{V_{x*}}{\nu g K_0} \quad (2.73)$$

2.4.2 Характерное время пневматической тормозной системы

Считаем, что давление в тормозном цилиндре $P_* = const$, для заполнения $P_* = P_g$ а для выпуска $P_* = P_a$.

Тогда за характерное время выберем $T_{e_{in}}$ для заполнения, а $T_{e_{out}}$ для выпуска.

Так как эти времена отличаются примерно в 3 раза выберем за характерное время тормозной системы наименьшую из этих величин

$$T_7 = T_{e_{in}} \quad (2.74)$$

Соотношение характерных времен

В дальнейшем будем рассматривать в качестве примера параметры автобуса городского типа, рассмотренного ранее в работе Магомедова [7].

Для автобуса примем следующие численные значения

$$M = 9584\text{кг} \sim 10^4, K_0 = 10, \nu \sim 1, C_1 = 248487\text{Нс/м} \sim 2.5 \times 10^5, \\ C_2 = 407115\text{Нс/м} \sim 4 \times 10^5, m_A = 390\text{кг}, K_z = 841960\text{Н/м} \sim 8.5 \times 10^5, \\ I_j = 18.9\text{кгм}^2 \sim 20, R = 0.53\text{м} \sim 0.5, \text{ при скорости } V_x = 20\text{м/с}$$

тогда

$$\begin{aligned} T_0 &\sim 1 \\ T_1 &\sim \frac{1}{10} \\ T_2 &\sim \frac{1}{50} \\ T_3 &\text{ от } \frac{1}{300} \text{ до } \frac{1}{60} \quad \text{в зависимости от } \nu \\ T_4 &\sim \frac{1}{10000} \\ T_5 &\sim \frac{1}{10000} \\ T_6 &\sim \frac{1}{10} \\ T_7 &\sim \frac{1}{30} \end{aligned}$$

то есть

$$T_0 \gg T_1 \sim T_6 \gg T_7 \sim T_2 \gg T_3 \gg T_4 \sim T_5 \quad (2.75)$$

2.4.3 Фракционный анализ уравнений движения

Введем безразмерные переменные (Знаком "*" обозначены характерные размерные значения принятых величин).

$$V_x = V_{x_*} v_x, \quad (2.76)$$

здесь V_{x_*} -характерная скорость в продольном направлении. За V_{x_*} выберем скорость движения автомобиля в начальный момент времени. Если время рассмотренной задачи невелико, то эта скорость не успеет измениться на порядок и тогда $v_x \sim 1$.

$$V_y = V_{y_*} v_y, \quad (2.77)$$

где V_{y_*} -характерная скорость в поперечном направлении. За V_{y_*} выберем скорость движения автомобиля в поперечном направлении в начальный момент времени. Считаем, что движение и в поперечном направлении таково, что поперечная скорость кузова не превышает $0.1V_{x_*}$. Тогда $V_{y_*} = 0.1V_{x_*}$

$$V_z = V_{z_*} v_z \quad (2.78)$$

V_{z_*} -характерная скорость в вертикальном направлении. За V_{z_*} выберем характерную величину амплитуды изменения скорости при вертикальных колебаниях подвески на собственной частоте. $V_{z_*} = \frac{Z_* 2\pi}{T_1}$.

$$N_{ij} = N_* n_{ij} \quad (2.79)$$

N_* -характерное значение нормальной реакции, для N_* выберем значение $N_* = \frac{Mg}{4}$

$$P_{ijx} = P_* p_{ijx}, \quad (2.80)$$

$$P_{ijy} = P_* p_{ijy}. \quad (2.81)$$

Здесь P_* -характерное значение контактной силы. Выберем в качестве характерного значения контактной силы при продольном движении автомобиля и отсутствии вертикальных колебаний величину $P_* = \nu_* N_*$, где $\nu_* = 1$.

$$\Omega_x = \Omega_{x_*} \omega_x \quad (2.82)$$

здесь Ω_{x_*} -характерная угловая скорость крена автомобиля, при отсутствии вертикальных колебаний. Вращение происходит вокруг центра масс, выберем $\Omega_{x_*} = \frac{V_{z_*}}{B}$.

$$\Omega_y = \Omega_{y_*} \omega_y \quad (2.83)$$

Ω_{y_*} -характерная угловая скорость тангажа автомобиля, при отсутствии вертикальных колебаний. Вращение происходит вокруг центра масс, имеем $\Omega_{y_*} = \frac{V_{z_*}}{A_2}$.

$$\Omega_z = \Omega_{z_*} \omega_z \quad (2.84)$$

Ω_{z_*} -характерная угловая скорость изменения курса автомобиля, автомобиль вращается вокруг вертикальной оси вокруг центра масс. Имеем $\Omega_{z_*} = \frac{V_{y_*}}{A_1}$.

$$\Omega_{ij} = \Omega_* \omega_{ij} \quad (2.85)$$

где Ω_* -характерная угловая скорость вращения колеса. За Ω_* выберем угловую скорость при отсутствии проскальзывания и заноса кузова. Автомобиль движется в продольном направлении со скоростью V_{x_*} и $\Omega_* = \frac{V_{x_*}}{R}$.

$$\Theta_{ij} = \Theta_* \theta_{ij} \quad (2.86)$$

здесь Θ_* -характерный угол поворота передних колес вокруг вертикальной оси. Выберем в качестве характерного максимальное

значения этого угла.

$$\Psi = \Psi_* \psi \quad (2.87)$$

Ψ_* -характерный угол крена автомобиля. Выберем за Ψ_* изменение угла Ψ при вращении кузова с характерной угловой скоростью Ω_{z_*} за время T_6 , тогда $\Psi_* = \Omega_{z_*} T_6$.

$$\Gamma = \Gamma_* \gamma \quad (2.88)$$

Γ_* -характерный угол тангажа автомобиля. Выберем за Γ_* изменение угла Γ при вращения кузова за характерное время поступательных упругих колебаний корпуса в рессорной подвеске, $\Gamma_* = \Omega_{x_*} T_1$.

$$\Xi = \Xi_* \vartheta \quad (2.89)$$

Ξ_* -характерный угол курса автомобиля. Выберем изменение угла после характерного времени поступательных упругих колебаний корпуса в рессорной подвеске, $\Xi_* = \Omega_{y_*} T_1$.

$$\check{\xi}_{ij} = \check{\xi}_* \xi_{ij} \quad (2.90)$$

$\check{\xi}_*$ -характерное значение деформации шин в продольном направлении. Выберем за $\check{\xi}_*$ деформацию шины при характерной продольной скорости за характерное время T_3 , $\check{\xi}_* = V_{x_*} T_3$.

$$\check{\eta}_{ij} = \check{\eta}_* \eta_{ij} \quad (2.91)$$

$\check{\eta}_*$ -характерное значение деформации шин в поперечном направлении. Выберем за $\check{\eta}_*$ деформацию шины при движении в поперечном направлении с характерной скоростью V_{y_*} за характерное время T_5 , $\check{\eta}_* = V_{y_*} T_5$.

$$\check{\zeta}_{ij} = \check{\zeta}_* \zeta_{ij} \quad (2.92)$$

$\check{\zeta}_*$ -характерное значение деформации шин в вертикальном направлении. Выберем за $\check{\zeta}_*$ деформацию шины при характерной нормальной реакции, $\check{\zeta}_* = \frac{Mg}{4K_z}$.

$$T = T_*t \quad (2.93)$$

T_* -характерное время, которое должно выбираться в зависимости от решаемой задачи. Оно будет выбрано позднее.

Уравнения принимают вид

$$\frac{MV_{x_*}}{T_*} \frac{dv_x}{dt} = P_* \sum_{i,j=1}^2 p_{ijx} + MV_{y_*} \Omega_{z_*} v_y \omega_z + F_{ax} \quad (2.94)$$

$$\frac{MV_{y_*}}{T_*} \frac{dv_y}{dt} = P_* \sum_{i,j=1}^2 p_{ijy} + MV_{x_*} \Omega_{z_*} v_x \omega_z + F_{ay} \quad (2.95)$$

$$\frac{MV_{z_*}}{T_*} \frac{dv_z}{dt} = N_* \sum_{i,j=1}^2 n_{ij} - Mg + F_{az} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \frac{I_x \Omega_{x_*}}{T_*} \frac{d\omega_x}{dt} = N_* \left[\sum_{i=1}^2 n_{i1} - \sum_{i=1}^2 n_{i2} \right] B - Z P_* \sum_{i,j=1}^2 p_{ijy} - \\ - \sum_{j=1}^2 I_{1jx} \frac{\Omega_{1jx_*}}{T_*} \left[\frac{d\omega_{1jx}}{dt} \sin \Theta_* \theta + \omega_{1jx} \Theta_* \frac{d\theta_{ij}}{dt} \cos \Theta_* \theta_{1j} - \omega_{1jx} \Omega_{z_*} \omega_z \cos \Theta_* \theta_{1j} \right] \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned}
\frac{I_y \Omega_{y*}}{T_*} \frac{d\omega_y}{dt} &= A_2 N_* \sum_{j=1}^2 n_{2j} - A_1 N_* \sum_{j=1}^2 n_{1j} - Z P_* \sum_{i,j=1}^2 p_{ijx} - \\
- \sum_{j=1}^2 I_{1jy} \frac{\Omega_{1jy*}}{T_*} &\left[\frac{d\omega_{1jy}}{dt} \cos \Theta_* \theta + \omega_{1jy} \Theta_* \frac{d\theta_{ij}}{dt} \sin \Theta_* \theta_{1j} - \omega_{1jy} \Omega_{z*} \omega_z \sin \Theta_* \theta_{1j} \right] - \\
&- \sum_{j=1}^2 I_{2jy} \frac{\Omega_{2jy*}}{T_*} \frac{d\omega_{2jy}}{dt} \quad (2.98)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{I_z \Omega_{z*}}{T_*} \frac{d\omega_z}{dt} &= B P_* [(p_{12x} + p_{22x}) - (p_{11x} + p_{21x})] + \\
&+ A_1 P_* (p_{11y} + p_{12y}) - A_2 P_* (p_{21y} + p_{22y}) \quad (2.99)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{M_c \check{\xi}_*}{T_*^2} \frac{d^2 \xi_{ij}}{dt^2} &= -\frac{C_x \check{\xi}_*}{T_*} \frac{d\xi_{ij}}{dt} - K_x \check{\xi}_* \xi_{ij} - \nu N_* n_{ij} \frac{s_{xij}}{s_{ij}} \varphi(s_{ij}) - \\
&- \frac{M_c V_{x*}}{T_*} \frac{dv_x}{dt} - \frac{M_c R \Omega_*}{T_*} \frac{d\omega}{dt} \quad (2.100)
\end{aligned}$$

$$\frac{M_c \check{\eta}_*}{T_*^2} \frac{d^2 \eta_{ij}}{dt^2} = -\frac{C_y \check{\eta}_*}{T_*} \frac{d\eta_{ij}}{dt} - K_y \check{\eta}_* \eta_{ij} - \nu N_* n_{ij} \frac{s_{yij}}{s_{ij}} \varphi(s_{ij}) - \frac{M_c V_{y*}}{T_*} \frac{dv_y}{dt} \quad (2.101)$$

$$\frac{C_z \check{\zeta}_*}{T_*} \frac{d\zeta}{dt} = -K_z \check{\zeta}_* \zeta + N_* n_{ij} \quad (2.102)$$

$$\frac{X_*}{T_*} \frac{dx}{dt} = V_{x*} v_x \cos \Psi_* \psi - V_{y*} v_y \sin \Psi_* \psi \quad (2.103)$$

$$\frac{Y_*}{T_*} \frac{dy}{dt} = V_{x*} v_x \sin \Psi_* \psi - V_{y*} v_y \cos \Psi_* \psi \quad (2.104)$$

$$\frac{Z_* dz}{T_* dt} = V_{z_*} v_z \quad (2.105)$$

$$\frac{\Psi_* d\psi}{T_* dt} = \Omega_{z_*} \omega_z \quad (2.106)$$

$$\frac{\Gamma_* d\gamma}{T_* dt} = \Omega_{x_*} \omega_x \quad (2.107)$$

$$\frac{\Xi_* d\vartheta}{T_* dt} = \Omega_{y_*} \omega_y \quad (2.108)$$

$$\frac{I_j \Omega_{ijy_*} d\omega_{ijy}}{T_* dt} = -P_{ijx_*} p_{ijx} (R - \check{\zeta}_{ij}) + L_* l_{ij} \quad (2.109)$$

$$\begin{cases} \frac{P_{m_*} T_{e_{in}} dp_{m_{ij}}}{T_* dt} = -P_{m_*} p_{m_{ij}} + P_{\Pi} (T_* t + \Delta t_b) & \text{заполнение} \\ \frac{P_{m_*} T_{e_{out}} dp_{m_{ij}}}{T_* dt} = -P_{m_*} p_{m_{ij}} + P_a & \text{выпуск} \end{cases} \quad (2.110)$$

перепишем все уравнения

$$\frac{MV_{x_*} dv_x}{P_* T_* dt} = \sum_{i,j=1}^2 p_{ijx} + \frac{MV_{y_*} \Omega_{z_*}}{P_*} v_y \omega_z + \frac{F_{ax}}{P_*} \quad (2.111)$$

$$\frac{MV_{y_*} dv_y}{P_* T_* dt} = \sum_{i,j=1}^2 p_{ijy} + \frac{MV_{x_*} \Omega_{z_*}}{P_*} v_x \omega_z + \frac{F_{ay}}{P_*} \quad (2.112)$$

$$\frac{MV_{z_*} dv_z}{N_* T_* dt} = \sum_{i,j=1}^2 n_{ij} - \frac{Mg}{N_*} + \frac{F_{az}}{N_*} \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned}
\frac{I_x \Omega_{x_*}}{B \nu N_* T_*} \frac{d\omega_x}{dt} &= \left[\sum_{i=1}^2 n_{i1} - \sum_{i=1}^2 n_{i2} \right] - \frac{Z}{B} \sum_{i,j=1}^2 p_{ijy} - \\
&- \frac{I_{11x} \Omega_*}{B \nu N_* T_*} \left[\frac{d\omega_{11x}}{dt} \sin \Theta_* \theta + \omega_{11x} \Theta_* \frac{d\theta_{11}}{dt} \cos \Theta_* \theta_{11} - \omega_{11x} \Omega_{z_*} \omega_z \cos \Theta_* \theta_{11} \right] - \\
&\frac{I_{12x} \Omega_*}{B \nu N_* T_*} \left[\frac{d\omega_{12x}}{dt} \sin \Theta_* \theta + \omega_{12x} \Theta_* \frac{d\theta_{12}}{dt} \cos \Theta_* \theta_{12} - \omega_{12x} \Omega_{z_*} \omega_z \cos \Theta_* \theta_{12} \right]
\end{aligned} \tag{2.114}$$

$$\begin{aligned}
\frac{I_y \Omega_{y_*}}{A_2 \nu N_* T_*} \frac{d\omega_y}{dt} &= \sum_{j=1}^2 n_{2j} - \frac{A_1}{A_2} \sum_{j=1}^2 n_{1j} - \frac{Z}{A_2} \sum_{i,j=1}^2 p_{ijx} - \\
&- \frac{I_{11y} V_{11x_*}}{A_2 R N_* T_*} \left[\frac{d\omega_{11y}}{dt} \cos \Theta_* \theta + \omega_{11y} \Theta_* \frac{d\theta_{11}}{dt} \sin \Theta_* \theta_{11} - \omega_{11y} \Omega_{z_*} \omega_z \sin \Theta_* \theta_{11} \right] - \\
&- \frac{I_{12y} V_{12x_*}}{A_2 \nu R N_* T_*} \left[\frac{d\omega_{12y}}{dt} \cos \Theta_* \theta + \omega_{12y} \Theta_* \frac{d\theta_{12}}{dt} \sin \Theta_* \theta_{12} - \omega_{12y} \Omega_{z_*} \omega_z \sin \Theta_* \theta_{12} \right] - \\
&\frac{I_{21y} V_{21x_*}}{A_2 \nu R N_* T_*} \frac{d\omega_{21y}}{dt} - \frac{I_{22y} V_{22x_*}}{A_2 \nu R N_* T_*} \frac{d\omega_{22y}}{dt}
\end{aligned} \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned}
\frac{I_z \Omega_{z_*}}{A_1 P_* T_*} \frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{B}{A_1} [(p_{12x} + p_{22x}) - (p_{11x} + p_{21x})] + \\
&+ (p_{11y} + p_{12y}) - \frac{A_2}{A_1} (p_{21y} + p_{22y})
\end{aligned} \tag{2.116}$$

$$\begin{aligned}
\frac{M_c}{K_x T_*^2} \frac{d^2 \xi_{ij}}{dt^2} &= - \frac{C_x}{K_x T_*} \frac{d\xi_{ij}}{dt} \xi_{ij} - \frac{\nu N_* n_{ij} s_{x_{ij}}}{K_x \check{\xi}_{ij} s_{ij}} \varphi(s_{ij}) - \\
&- \frac{M_c V_{x_*}}{K_x \check{\xi}_* T_*} \frac{dv_x}{dt} - \frac{M_c R \Omega_*}{K_x \check{\xi}_* T_*} \frac{d\omega}{dt}
\end{aligned} \tag{2.117}$$

$$\frac{M_c}{K_y T_*^2} \frac{d^2 \eta_{ij}}{dt^2} = - \frac{C_y}{K_y T_*} \frac{d\eta_{ij}}{dt} - \eta_{ij} - \frac{\nu N_* n_{ij} s_{y_{ij}}}{K_y \check{\eta}_* s_{ij}} \varphi(s_{ij}) - \frac{M_c V_{y_*}}{K_y \check{\eta}_* T_*} \frac{dv_y}{dt} \tag{2.118}$$

$$\frac{C_z}{K_z T_*} \frac{d\zeta}{dt} = -\zeta + \frac{N_*}{K_z \zeta_*} n_{ij} \quad (2.119)$$

$$\frac{Z_*}{V_{z_*} T_*} \frac{dz}{dt} = v_z \quad (2.120)$$

$$\frac{\Psi_*}{\Omega_{z_*} T_*} \frac{d\psi}{dt} = \omega_z \quad (2.121)$$

$$\frac{\Gamma_*}{\Omega_{x_*} T_*} \frac{d\gamma}{dt} = \omega_x \quad (2.122)$$

$$\frac{\Xi_*}{\Omega_{y_*} T_*} \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_y. \quad (2.123)$$

Поскольку $R \gg \zeta_{ij}$

$$\frac{I_j \Omega_{ijy_*}}{L_* T_*} \frac{d\omega_{ijy}}{dt} = \frac{-P_{ijx_*} p_{ijx} R}{L_*} + l_{ij} \quad (2.124)$$

$$\begin{cases} \frac{T_{e_{in}}}{T_*} \frac{dp_{mij}}{dt} = -p_m + \frac{P_n}{P_{m_*}} (T_* t + \Delta t_b) & \text{заполнение} \\ \frac{T_{e_{out}}}{T_*} \frac{dp_{mij}}{dt} = -p_m + \frac{P_a}{P_{m_*}} & \text{выпуск} \end{cases} \quad (2.125)$$

Рассмотрим быстрые движения. За T_* выберем оценку постоянной времени изменения угловой скорости колеса под действием контактной продольной силы T_3

Для (2.111)

$$4 \frac{T_0}{T_3} \frac{dv_x}{dt} = \sum_{i,j=1}^2 p_{ij} + \frac{V_{y_0}^2}{g A_1} v_y \omega_x + \frac{F_{ax}}{Mg}. \quad (2.126)$$

Для (2.112)

$$\frac{T_6}{T_3} \frac{V_{y_*}}{V_{x_*}} \frac{dv_y}{dt} = \sum_{i,j=1}^2 p_{ij} + 4T_0 \Omega_{z_*} v_x \omega_z + \frac{F_{ay}}{Mg}. \quad (2.127)$$

Для (2.113) при $Z_* = Z_{\text{ст}} = \frac{Mg}{2(C_1+C_2)}$

$$4 \frac{T_1}{T_3} \frac{dv_z}{dt} = \sum_{i,j=1}^2 n_{ij} - 1 + \frac{F_{az}}{Mg}. \quad (2.128)$$

Для (2.114) при $\Omega_{x_*} = \frac{Z_*}{T_1 B}$, $\frac{Z_*}{g} = T_1^2$

$$\begin{aligned} \frac{4}{\nu} \frac{\rho^2}{B^2} \frac{T_1}{T_3} \frac{d\omega_x}{dt} &= \left[\sum_{i=1}^2 n_{i1} - \sum_{i=1}^2 n_{i2} \right] - \frac{Z}{B} \sum_{i,j=1}^2 p_{ijy} - \\ &- \frac{I_{11x} \Omega_*}{B \nu N_* T_3} \left[\frac{d\omega_{11x}}{dt} \sin \Theta_* \theta + \omega_{11x} \Theta_* \frac{d\theta_{11}}{dt} \cos \Theta_* \theta_{11} - \omega_{11x} \Omega_{z_*} \omega_z \cos \Theta_* \theta_{11} \right] - \\ &- \frac{I_{12x} \Omega_*}{B \nu N_* T_3} \left[\frac{d\omega_{12x}}{dt} \sin \Theta_* \theta + \omega_{12x} \Theta_* \frac{d\theta_{12}}{dt} \cos \Theta_* \theta_{12} - \omega_{12x} \Omega_{z_*} \omega_z \cos \Theta_* \theta_{12} \right]. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Для (2.115) при $\Omega_{y_*} = \frac{Z_*}{T_1 A_2}$

$$\begin{aligned} \frac{4}{\nu} \frac{\rho^2}{A_2^2} \frac{T_1}{T_3} \frac{d\omega_y}{dt} &= A_2 \sum_{j=1}^2 n_{2j} - A_1 \sum_{j=1}^2 n_{1j} - Z \sum_{i,j=1}^2 p_{ijx} - \\ &- \frac{RK_0}{A_2} \left[\frac{d\omega_{11y}}{dt} \cos \Theta_* \theta + \omega_{11y} \Theta_* \frac{d\theta_{11}}{dt} \sin \Theta_* \theta_{11} - \omega_{11y} \Omega_{z_*} \omega_z \sin \Theta_* \theta_{11} \right] - \\ &- \frac{RK_0}{A_2} \left[\frac{d\omega_{12y}}{dt} \cos \Theta_* \theta + \omega_{12y} \Theta_* \frac{d\theta_{12}}{dt} \sin \Theta_* \theta_{12} - \omega_{12y} \Omega_{z_*} \omega_z \sin \Theta_* \theta_{12} \right] - \\ &- \frac{RK_0}{A_2} \frac{d\omega_{21y}}{dt} - \frac{RK_0}{A_2} \frac{d\omega_{22y}}{dt}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Для (2.116)

$$4 \frac{\rho^2}{A_1^2} \frac{T_0}{T_3} \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{B}{A_1} [(p_{12x} + p_{22x}) - (p_{11x} + p_{21x})] + (p_{11y} + p_{12y}) - \frac{A_2}{A_1} (p_{21y} + p_{22y}). \quad (2.131)$$

Для (2.117)

$$\frac{T_4^2}{T_3^2} \frac{d^2 \xi_{ij}}{dt^2} = -\frac{C_x}{K_x T_3} \frac{d\xi_{ij}}{dt} - \xi_{ij} - \frac{\nu M g n_{ij}}{4 K_x V_{x*} T_3} \frac{s_{xij}}{s_{ij}} \varphi(s_{ij}) - \frac{T_4^2}{T_3^2} \frac{dv_x}{dt} - \frac{T_4^2}{T_3^2} \frac{d\omega_{ij}}{dt}. \quad (2.132)$$

Для (2.118)

$$\frac{T_5^2}{T_3^2} \frac{d^2 \eta_{ij}}{dt^2} = -\frac{C_y}{K_y T_3} \frac{d\eta_{ij}}{dt} - \eta_{ij} - \frac{\nu M g n_{ij}}{K_y V_{y*} T_5} \frac{s_{yij}}{s_{ij}} \varphi(s_{ij}) - \frac{T_5}{T_3} \frac{dv_y}{dt}. \quad (2.133)$$

Для (2.119)

$$\frac{C_z}{K_z T_3} \frac{d\zeta}{dt} = -\zeta + n_{ij}. \quad (2.134)$$

Для (2.120)

$$\frac{T_1}{T_3} \frac{dz}{dt} = v_z. \quad (2.135)$$

Для (2.121)

$$\frac{T_6}{T_3} \frac{d\psi}{dt} = \omega_z. \quad (2.136)$$

Для (2.122)

$$\frac{T_1}{T_3} \frac{d\gamma}{dt} = \omega_x. \quad (2.137)$$

Для (2.123)

$$\frac{T_1}{T_3} \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_y. \quad (2.138)$$

Для (2.124)

$$\frac{d\omega_{ijy}}{dt} = -\nu_* p_{ijx} + l_{ij}. \quad (2.139)$$

Для (2.125)

$$\begin{cases} \frac{T_{e_{in}}}{T_3} \frac{dp_m}{dt} = -p_{m_{ij}} + \frac{P_u}{P_{m*}} (T_3 t + \Delta t_b) & \text{заполнение} \\ \frac{T_{e_{out}}}{T_3} \frac{dp_m}{dt} = -p_{m_{ij}} + \frac{P_a}{P_{m*}} & \text{выпуск} \end{cases} \quad (2.140)$$

Примем

$$\begin{aligned} \frac{T_3}{T_0} = \varepsilon_0 &\sim \frac{1}{300} \\ \frac{T_3}{T_1} = \varepsilon_1 &\sim \frac{1}{30} \\ \frac{T_3}{T_6} = \varepsilon_2 &\sim \frac{1}{30} \end{aligned} \quad (2.141)$$

Для (2.126) имеем

$$\begin{aligned} \frac{V_{y_0}^2}{gA_1} = \epsilon_1 &\sim \frac{1}{30} \\ \frac{1}{Mg} = \epsilon_2 &\sim \frac{1}{10^5}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{dv_x}{dt} = \varepsilon_0 \left(\sum_{i,j=1}^2 p_{ij} + \epsilon_1 v_y \omega_x + \epsilon_2 F_{ax} \right). \quad (2.142)$$

Для (2.127)

$$4T_0 \Omega_{z_*} = \kappa_1 \sim \frac{1}{3},$$

тогда

$$\frac{dv_y}{dt} = \varepsilon_2 \left(\sum_{i,j=1}^2 p_{ij} + \kappa_1 v_x \omega_z + \epsilon_2 F_{ay} \right). \quad (2.143)$$

Для (2.128)

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{4}\epsilon_1 \left(\sum_{i,j=1}^2 n_{ij} - 1 + \epsilon_2 F_{az} \right). \quad (2.144)$$

Для (2.129)

$$\frac{I_{1jx}\Omega_*}{B\nu N_* T_3} = \epsilon_3 \sim \frac{1}{100},$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_x}{dt} = \frac{\nu B^2}{4 \rho^2} \epsilon_1 \left(\left[\sum_{i=1}^2 n_{i1} - \sum_{i=1}^2 n_{i2} \right] - \frac{Z}{B} \sum_{i,j=1}^2 p_{ijy} - \right. \\ \left. - 2\epsilon_3 \left[\frac{d\omega_{1j}}{dt} \sin\Theta_*\theta + \omega_{1j}\Theta_* \frac{d\theta}{dt} \cos\Theta_*\theta - \omega_{1j}\Omega_{z*}\omega_z \cos\Theta_*\theta \right] \right). \end{aligned} \quad (2.145)$$

Для (2.130)

$$\frac{RK_0}{A_2} = \kappa_2 \sim 3$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_y}{dt} = \frac{\nu A_2^2}{4 \rho^2} \epsilon_1 \left(\sum_{j=1}^2 n_{2j} - \frac{A_1}{A_2} \sum_{j=1}^2 n_{1j} - \frac{Z}{A_1} \sum_{i,j=1}^2 p_{ijx} - \right. \\ \left. - 2\kappa_2 \left[\frac{d\omega_{1j}}{dt} \cos\Theta_*\theta + \omega_{1j}\Theta_* \frac{d\theta}{dt} \sin\Theta_*\theta - \omega_{1j}\Omega_{z*}\omega_z \sin\Theta_*\theta \right] - \right. \\ \left. - 2\kappa_2 \frac{d\omega_{2j}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (2.146)$$

Для (2.131)

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{1}{4} \frac{A_1^2}{\rho^2} \epsilon_0 \left(\frac{B}{A_1} [(p_{12x} + p_{22x}) - (p_{11x} + p_{21x})] + (p_{11y} + p_{12y}) - \right. \\ \left. - \frac{A_2}{A_1} (p_{21y} + p_{22y}) \right) \end{aligned} \quad (2.147)$$

Для (2.132)

$$\frac{d^2 \xi_{ij}}{dt^2} = -\frac{C_x T_3}{K_x T_4^2} \frac{d\xi_{ij}}{dt} - \frac{T_3^2}{T_4^2} \xi_{ij} - \frac{\nu M g n_{ij} T_3}{4 K_x V_{x_*} T_4^2} \frac{s_{x_{ij}}}{s_{ij}} \varphi(s_{ij}) - \frac{dv_x}{dt} - \frac{d\omega_{ij}}{dt}, \quad (2.148)$$

где

$$\frac{C_x T_3}{K_x T_4^2} = q$$

$$\frac{T_3^2}{T_4^2} = p$$

$$\frac{M g n_{ij} T_3}{4 K_x V_{x_*} T_4^2} = k$$

Для (2.133)

$$\frac{d^2 \eta_{ij}}{dt^2} = -\frac{C_y T_3}{K_y T_5^2} \frac{d\eta_{ij}}{dt} - \frac{T_3^2}{T_5^2} \eta_{ij} - \frac{\nu M g n_{ij} T_3}{4 K_y V_{y_*} T_5^2} \frac{s_{y_{ij}}}{s_{ij}} \varphi(s_{ij}) - \frac{dv_y}{dt}, \quad (2.149)$$

где

$$\frac{C_y T_3}{K_y T_5^2} = \frac{C_y T_3}{M_c} = q_y$$

$$\frac{T_3^2}{T_5^2} = \frac{K_y T_3^2}{M_c} = p_y$$

$$\frac{\nu M g n_{ij} T_3}{4 K_y V_{y_*} T_5^2} = k_y$$

Для (2.134)

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{K_z T_3}{C_z} (\zeta + n_{ij}) \quad (2.150)$$

Для (2.135)

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon_1 v_z \quad (2.151)$$

Для (2.136)

$$\frac{d\psi}{dt} = \varepsilon_2 \omega_z \quad (2.152)$$

Для (2.137)

$$\frac{d\gamma}{dt} = \varepsilon_1 \omega_x \quad (2.153)$$

Для (2.138)

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \varepsilon_1 \omega_y \quad (2.154)$$

Для (2.140)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dp_{m_{ij}}}{dt} = \frac{T_3}{T_{e_{in}}} \left(-p_{m_{ij}} + \frac{P_u}{P_{m*}} (T_3 t + \Delta t_b) \right) & \text{заполнение} \\ \frac{dp_{m_{ij}}}{dt} = \frac{T_3}{T_{e_{out}}} \left(-p_{m_{ij}} + \frac{P_a}{P_{m*}} \right) & \text{выпуск} \end{array} \right. \quad (2.155)$$

Для величин ε_0 , ε_1 , ε_2 определенных в (2.141), в соответствии с оценками (2.75) верно $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$. Будем рассматривать приближенные решения при $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Такое приближение применимо в силу метода Пуанкаре [12].

Ошибки приближенного решения составят величину порядка $\max(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_y}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_z}{dt} &= 0 \\ \frac{d\omega_x}{dt} &= 0 \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (2.156)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_z}{dt} &= 0 \\
\frac{dz}{dt} &= 0 \\
\frac{d\psi}{dt} &= 0 \\
\frac{d\gamma}{dt} &= 0 \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= 0 \\
\frac{d^2\xi_{ij}}{dt^2} &= -q\frac{d\xi_{ij}}{dt} - p\xi_{ij} - \nu kn_{ij}\frac{s_{xij}}{s_{ij}}\varphi(s_{ij}) - \frac{dv_x}{dt} - \frac{d\omega_{ij}}{dt} \\
\frac{d^2\eta_{ij}}{dt^2} &= -q_y\frac{d\eta_{ij}}{dt} - p_y\eta_{ij} - \nu k_y n_{ij}\frac{s_{yij}}{s_{ij}}\varphi(s_{ij}) - \frac{dv_y}{dt} \\
\frac{d\zeta}{dt} &= -\frac{K_z T_3}{C_z}(\zeta + n_{ij}) \\
\frac{d\omega_{ijy}}{dt} &= -\nu_* p_{ijx} + l_{ij} \\
\begin{cases} \frac{dp_{mij}}{dt} = \frac{T_3}{T_e} \left(-p_{mij} + \frac{P_u}{P_{m*}} \right) \\ \frac{dp_{mij}}{dt} = \frac{T_3}{T_e} \left(-p_{mij} + \frac{P_a}{P_{m*}} \right) \end{cases}
\end{aligned}$$

В результате имеем, что из системы 32 дифференциальных уравнений, при исследовании быстрых изменений угловой скорости вращения колес, решения двенадцати из них можем считать постоянными для рассматриваемых интервалов времени менее одной десятой доли секунды. Тогда есть возможность построить более простую модель для описания такого движения. Остаются уравнения неподрессоренных элементов, уравнение вращения колеса и уравнение модели изменения движения в тормозной системе.

$$\frac{d^2\xi_{ij}}{dt^2} = -q\frac{d\xi_{ij}}{dt} - p\xi_{ij} - \nu kn_{ij}\frac{s_{xij}}{s_{ij}}\varphi(s_{ij}) - \frac{dv_x}{dt} - \frac{d\omega_{ij}}{dt}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\eta_{ij}}{dt^2} &= -q_y \frac{d\eta_{ij}}{dt} - p_y \eta_{ij} - \nu k_y n_{ij} \frac{s_{yij}}{s_{ij}} \varphi(s_{ij}) - \frac{dv_y}{dt} \\
\frac{d\zeta}{dt} &= -\frac{K_z T_3}{C_z} (\zeta + n_{ij}) \\
\frac{d\omega_{ijy}}{dt} &= -\nu_* p_{ijx} + l_{ij} \\
\begin{cases} \frac{dp_{m_{ij}}}{dt} = \frac{T_3}{T_e} \left(-p_{m_{ij}} + \frac{P_u}{P_{m*}} \right) \\ \frac{dp_{m_{ij}}}{dt} = \frac{T_3}{T_e} \left(-p_{m_{ij}} + \frac{P_a}{P_{m*}} \right) \end{cases} \\
s_{ij} &= 1 + \omega_{ij} + \frac{d\xi_{ij}}{dt}
\end{aligned} \tag{2.157}$$

где величины V_x , N , ν считаются постоянными, тогда $n_{ij} \sim 1$

В общем случае

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$$

В дальнейшем будем рассматривать такие движения при которых $s_x \gg s_y$. Это условие соответствует нормальному режиму работы АБС, который не допускает заноса автомобиля. В этом случае с точностью до малых 2-го порядка по $\frac{s_y}{s_x}$ будем считать, что $s = s_x$.

Для уравнения неподрессоренных элементов и уравнения модели тормозной системы, отношения характерных времен имеют порядок $> \frac{1}{5}$. Эту величину не всегда можно считать малой.

Таким образом в общем случае необходимо рассматривать задачу влияния вертикальных колебаний на развитие периодических изменений угловой скорости вращения колес. Вид уравнения (2.157) показывает, что работа АБС не оказывает существенного влияния на вертикальные колебания колес. Поэтому на первом этапе целесообразно ограничиться рассмотрением процессов протекающих при отсутствии вертикальных и поперечных колебаний. В этих условиях в дальнейшем будем считать, что движение колеса на характерных временах порядка T_3 (не

превышает десятые доли секунды) описывается системой уравнений

$$\frac{d^2\xi_{ij}}{dt^2} = -q\frac{d\xi_{ij}}{dt} - p\xi_{ij} - \nu kn_{ij}\varphi(s_{ij}) - \frac{d\omega_{ij}}{dt} \quad (2.158)$$

$$\frac{d\omega_{ijy}}{dt} = -p_{ijx} + l_{ij} \quad (2.159)$$

$$\begin{cases} \frac{dp_{m_{ij}}}{dt} = \frac{T_3}{T_{e_{in}}} \left(-p_{m_{ij}} + \frac{P_{\Pi}}{P_{m*}} \right) \\ \frac{dp_{m_{ij}}}{dt} = \frac{T_3}{T_{e_{out}}} \left(-p_{m_{ij}} + \frac{P_a}{P_{m*}} \right) \end{cases} \quad (2.160)$$

$$s_{ij} = 1 + \omega_{ij} + \frac{d\xi_{ij}}{dt}$$

2.5 О дальнейшем упрощении уравнений движения

Обратим внимание, что уравнение 3.1, которое описывает изменение величины деформации ξ_{ij} можно записать в виде который содержит малый параметр $\mu = \frac{1}{p}$ при старшей производной.

Чаще всего для обоснования упрощенных моделей в этом случае используют теорему Тихонова.

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему общего вида:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Y(y, z, t, \mu); & y(0) &= y_0 \\ \mu \frac{dz}{dt} &= Z(y, z, t, \mu); & z(0) &= z_0 & \mu \ll 1 \end{aligned} \quad (2.161)$$

где y и z соответственно n - и m -мерные векторы.

Положив $\mu = 0$ и опустив z_0 , получим из (2.161) систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{dt} &= Y(\bar{y}, \bar{z}, t, 0); & \bar{y}(0) &= y_0 \\ 0 &= Z(\bar{y}, \bar{z}, t, 0) \end{aligned} \tag{2.162}$$

Тогда ставится вопрос о близости решений систем (2.161) и (2.162). Сформулируем несколько определений.

1. Корень $z = \phi(y, t)$ системы уравнений

$$Z(y, z, t, 0) = 0 \tag{2.163}$$

называется изолированным в некоторой ограниченной области изменения переменных y, t , если для каждого фиксированного значения y, t в произвольно малой окрестности корня не существует других корней уравнения (2.163).

Введем систему уравнений нулевого приближения для быстрых движений. Она получается, если в (2.161) перейти к быстрому времени $\tau = \frac{t}{\mu}$ и положить затем $\mu = 0$

$$\frac{dz}{d\tau} = Z(y, z, \tau, 0) \tag{2.164}$$

Здесь медленные y, t считаются параметрами. Переход к τ в правой части не производится, так как для любого конечного t при $\mu \rightarrow 0$ имеем $\tau \rightarrow \infty$, а $\mu\tau = t$.

2. Областью влияния точки покоя $z = \phi(y, t)$ называется множество точек z^+ таких, что решения присоединенной системы, имеющие в качестве начальных точек z^+ , при $t \rightarrow \inf$ будут стремиться к $\phi(y, t)$.

Теорема Тихонова выражает [17], [12].

Теорема 1. Пусть

1. Функции $Y(y, z, t, \mu)$ и $Z(y, z, t, \mu)$ аналитичны по y, z, t, μ в некоторой области пространства переменных.
2. Уравнение (2.163) имеет корень $z = \phi(y, t)$ в некоторой ограниченной области D изменения переменных y, t и этот корень - изолированный.
3. Функция $Y(y, \phi(y, t), t, 0)$ аналитична по y, t .
4. Начальные условия z_0 лежат в области влияния корня $z = \phi(y, t)$ системы (2.164).
5. Точка покоя $z = \phi(y, t)$ системы (2.164) является асимптотически устойчивой по Ляпунову для всех y, t , для которых определен корень уравнения (2.163).

При выполнении условия 1-5 решение $y(t, \mu), z(t, \mu)$ задачи (2.161) существует на $[0, T]$ и имеет место предельный переход

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} y(t, \mu) = \bar{y}(t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.165)$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} z(t, \mu) = \phi(\bar{y}(t), t) \equiv \bar{z}(t) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.166)$$

где $\bar{y}(t)$ - решение вырожденной задачи (2.162)

Теперь проверим выполнение условий теоремы Тихонова для систем (3.1) - (3.3). Представим уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_{ij}}{dt} &= l - \nu\varphi(s_{ij}) \\
\mu^2 \frac{d^2\xi_{ij}}{dt^2} &= -\mu^2 q \frac{d\xi_{ij}}{dt} - \xi_{ij} - \mu^2 k \nu\varphi(s_{ij}) - \mu^2 \frac{d\omega_{ij}}{dt}, \\
\frac{T_e}{T_3} \frac{dl_{ij}}{dt} &= \frac{K_l P_*}{L_*} - l_{ij}, \\
s_{ij} &= 1 + \omega_{ij} + \frac{d\xi_{ij}}{dt},
\end{aligned}
\tag{2.167}$$

где $\mu = \frac{1}{\sqrt{p}}$

Условие 1 выполняется очевидным образом на интервале времени, где отсутствуют переключения. Для условия 2 перепишем систему в случае, когда $\mu = 0$. Имеем, учитывая что $\mu^2 k \sim 1$

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_{ij}}{dt} &= l - \nu\varphi(s_{ij}), \\
0 &= -\xi_{ij} - \nu\varphi(s_{ij}), \\
\frac{T_e}{T_3} \frac{dl_{ij}}{dt} &= \frac{K_l P_*}{L_*} - l_{ij}, \\
s_{ij} &= 1 + \omega_{ij} + \frac{d\xi_{ij}}{dt}.
\end{aligned}
\tag{2.168}$$

Допустим $\varphi(s_{ij}) = K_{s_1} s_{ij}$.

Отсюда получим

$$\frac{d\xi_{ij}}{dt} = -(1 + \omega_{ij}) - \frac{p}{\nu K_{s_1}} \xi_{ij}.$$

Решение изолированные, то есть, условие 2 выполняется.

Подставим эти решения в систему (2.168):

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_{ij}}{dt} &= l + \xi_{ij} \\ \frac{T_e}{T_3} \frac{dl_{ij}}{dt} &= \frac{K_l P_*}{L_*} - l_{ij},\end{aligned}\tag{2.169}$$

Очевидно, что все правые части уравнений аналитичны на интервале между переключениями, так что условие 3 выполняется.

Построим присоединенную систему для системы (2.167), полагая $t = \mu\tau$

$$\frac{d^2\xi_{ij}}{d\tau^2} = \mu \frac{d\xi_{ij}}{d\tau} (q + \nu K_{s_1}) - \xi_{ij} - \mu^2 k\nu K_{s_1} (1 + \omega_{ij}) - \mu \frac{d\omega_{ij}}{d\tau}.\tag{2.170}$$

Корни этого уравнения устойчивы и изолированы, условия 4 и 5 выполняются. Значит приближенная система в случае, когда $\varphi(s_{ij})$ возрастающая линейная функция, верна.

Рассмотри случай, когда $\varphi(s_{ij}) = \varphi_0 - K_{s_2} s_{ij}$, где φ_0 и K_{s_2} - постоянные и $K_{s_2} > 0$

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_{ij}}{dt} &= l - \nu(\varphi_0 - K_{s_2} s_{ij}) \\ \mu^2 \frac{d^2\xi_{ij}}{dt^2} &= -\mu^2 q \frac{d\xi_{ij}}{dt} - \xi_{ij} - \mu^2 k\nu(\varphi_0 - K_{s_2} s_{ij}) - \mu^2 \frac{d\omega_{ij}}{dt}, \\ \frac{T_e}{T_3} \frac{dl_{ij}}{dt} &= \frac{K_l P_*}{L_*} - l_{ij}, \\ s_{ij} &= 1 + \omega_{ij} + \frac{d\xi_{ij}}{dt},\end{aligned}\tag{2.171}$$

Очевидно выполняется условие 1 на интервале времени, где отсутствуют переключения. Перепишем систему в случае, при $\mu = 0$.

Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_{ij}}{dt} &= l - \nu(\varphi_0 - K_{s_2}s_{ij}) \\
0 &= -\xi_{ij} - \mu^2 k\nu(\varphi_0 - K_{s_2}s_{ij}), \\
\frac{T_e}{T_3} \frac{dl_{ij}}{dt} &= \frac{K_l P_*}{L_*} - l_{ij}, \\
s_{ij} &= 1 + \omega_{ij} + \frac{d\xi_{ij}}{dt},
\end{aligned}
\tag{2.172}$$

получим

$$\frac{d\xi_{ij}}{dt} = \frac{p}{\nu k K_{s_2}} \xi_{ij} + \frac{k}{K_{s_2}} \varphi_0 - (1 + \omega_{ij})$$

Решение изолированные, то есть, условие 2 выполняется.

Поставим эти решения в систему (2.172):

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_{ij}}{dt} &= l + \frac{p}{\nu k} \xi_{ij} + \varphi_0(k - \nu) \\
\frac{T_e}{T_3} \frac{dl_{ij}}{dt} &= \frac{K_l P_*}{L_*} - l_{ij},
\end{aligned}
\tag{2.173}$$

Правые части уравнений аналитичны при отсутствии переключений, так что условие 3 выполняется.

Построим присоединенную систему для системы (2.171), полагая $t = \mu\tau$

$$\frac{d^2 \xi_{ij}}{d\tau^2} = \mu \frac{d\xi_{ij}}{d\tau} (\nu k K_{s_2} - q) - \xi_{ij} - \mu^2 k\nu(\varphi_0 - K_{s_2}(1 + \omega_{ij})) - \mu \frac{d\omega_{ij}}{d\tau} \tag{2.174}$$

Корни этого уравнения неустойчивы и в результате не выполняются условия теоремы Тихонова.

Так как мы работаем в окрестности максимума функции $\varphi(s)$, и условия теоремы Тихонова удовлетворяются только до максимума характеристики $\varphi(s)$, использовать приближенную модель мы не имеем права, несмотря на разнесение характерных времен.

Большинство работ по этой теме основаны на упрощенной модели одного колеса. Предполагается, что автомобиль движется только в продольном направлении и продольная скорость постоянна, нормальная реакция тоже постоянна, но, работ в которых обсуждается математическое оправдание таких предположений мало. Фракционный анализ необходим для уверенности в справедливости упрощенной модели. Также проведенный анализ показывает ограниченность использования принятой модели и может использоваться в дальнейшем для ее совершенствования.

Глава 3

Периодические режимы изменения угловой скорости колеса и их устойчивость

Перепишем систему для движения колеса

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -q\frac{d\xi}{dt} - p\xi - \nu kn\varphi(s) - \frac{d\omega}{dt} \quad (3.1)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -p_x + l \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \frac{dl}{dt} = \frac{T_3}{T_{e_{in}}} \left(\frac{K_l P_n}{L_*} - l \right) \\ \frac{dl_{ij}}{dt} = \frac{T_3}{T_{e_{out}}} \left(\frac{K_l P_a}{L_*} - l \right) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$s = 1 + \omega + \frac{d\xi}{dt}$$

3.1 Постановка задачи

Основной задачей является отыскание периодических решений $x_p(t, \Delta_1, \Delta_2)$ системы в окрестности максимального значения контактной силы для фиксированных заданных значений Δ_1, Δ_2 . Рассмотрим периодический режим переключения клапана системы.

Переключение клапана осуществляется с постоянным периодом $T_{\Pi} =$

$\tau_f + \tau_0$, где τ_0 - момент начала периода, а τ_f - конца периода.

Основными параметрам управления торможением служит длительность цикла $T_{\Pi} = |\tau_f - \tau_0|$ и τ_1 ; $\tau_0 \leq \tau_1 \leq \tau_f$.

На интервале $[\tau_0, \tau_1]$ первый трубопровод открыт, второй закрыт, на интервале $[\tau_1, \tau_f]$ - наоборот.

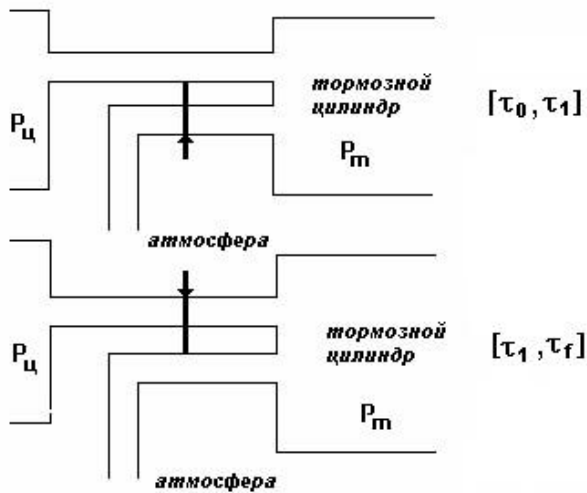


Рис. 3.1: Переключение тормозной системы

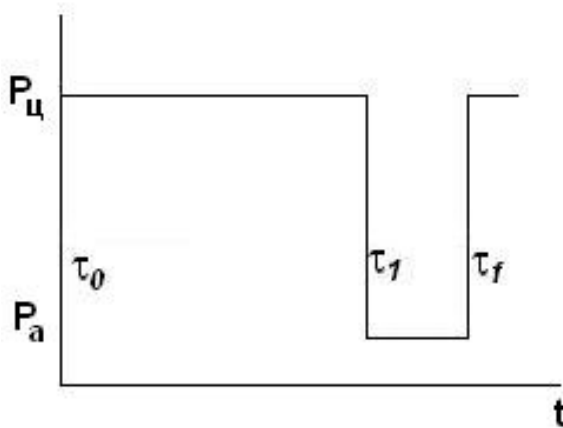


Рис. 3.2: Моменты времени переключения

За Δ_1 обозначим интервал времени с начала периода до момента переключения, то есть, интервал времени, когда трубопровод из центрального резервуара в тормозной цилиндр открыт $\Delta_1 = |\tau_1 - \tau_0|$. Вследствие увеличения давления воздуха в тормозном цилиндре, тормозной момент возрастает. Δ_2 обозначает интервал времени с момента переключения до конца периода, когда трубопровод из тормозного цилиндра в атмосферу открыт, давление в тормозном цилиндре стремится к атмосферному давлению и тормозной момент уменьшается $\Delta_2 = |\tau_f - \tau_1|$.

Если такие решения существуют, необходимо будет проверить устойчивость этих решений при малых отклонениях начальных условий и параметров модели. Для этого будет необходимо рассмотреть систему уравнений в отклонениях, построить матрицу преобразования за период системы уравнений в отклонениях и проанализировать собственные значения этой матрицы.

На первом этапе будем решать задачу отыскания периодических решений численно, используя вспомогательную задачу: интегрирование системы с управлением при обратной связи по s . Мы найдем периодические решения для управления с обратной связью, их периоды, моменты переключения и начальные условия. Эти периодические решения сохранят периодичность и для основного управления.

3.2 Отыскание периодических решений

Для отыскания периодических решений рассмотрим вспомогательную задачу. Управление с обратной связью устроено таким образом, что система переключает клапан, когда проскальзывание s достигает заданных граничных значений s_1 и s_2 . Требуется проверить остается ли ограниченным решение по остальным переменным и установится ли периодическое поведение. Обозначим искомое периодическое решение x_p .

Рассмотренная система относится к системам релейного типа.

Аналитический анализ релаксационных колебаний для построения периодических режимов [10] в этой системе представляется сложной задачей, так как система уравнений (3.1)-(3.3) сильно нелинейна. Отыскание периодических решений проведем численно.

Будем рассматривать значения (s_1, s_2) , при которых функция $\varphi(s)$ остается в окрестности максимального значения. На рис. 3.3 показан участок $\varphi(s)$ характеристики, на котором могут принимать значения величины (s_1, s_2) . Она определяется условием, что контактная сила отличается от своего максимального значения не более чем на 10%.

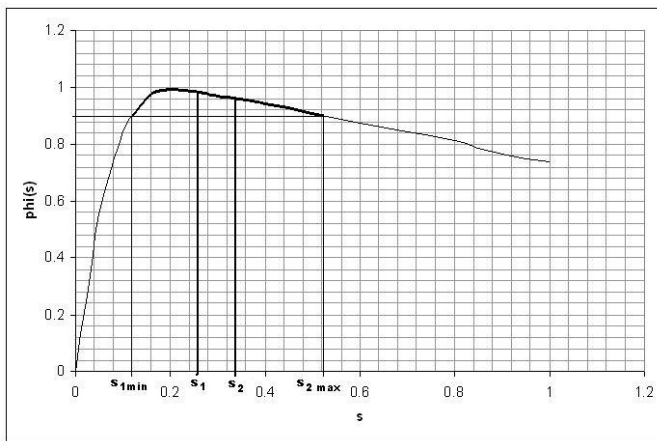


Рис. 3.3: Область вокруг максимального значения функций $\varphi(s)$

Область, рассматриваемых значений s_1 и s_2 приведена на рис. 3.4, она учитывает свойство $s_1 < s_2$.

Для отыскания периодических решений будем интегрировать систему уравнений (3.1)-(3.3) при начальных условиях, соответствующих реальной системе при торможении [3]. Управление клапанами моделируем следующим образом: трубопровод 1 открыт, пока проскальзывание s не достигает значения s_2 . К этому времени тормозной

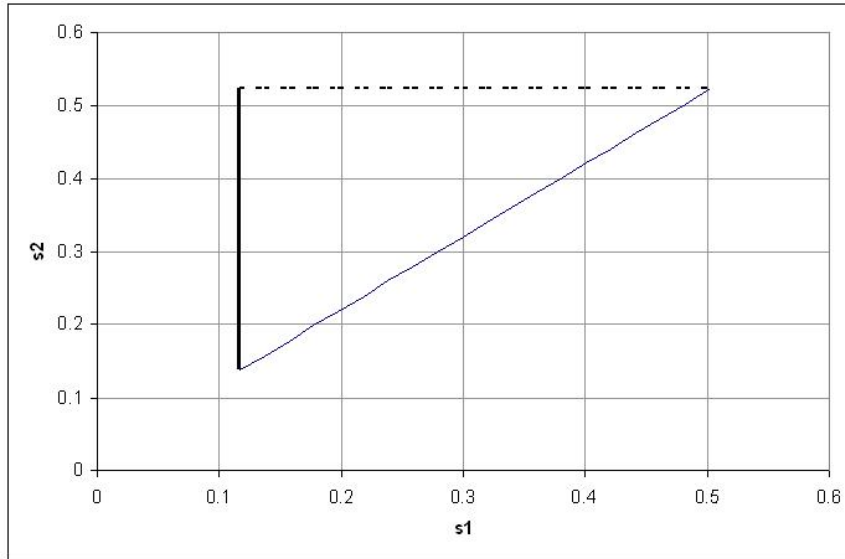


Рис. 3.4: Область значений точек переключения s_1 и s_2

цилиндр наполнится воздухом из центрального резервуара, и давление увеличится. Также увеличится тормозной момент. При $s = s_2$ происходит переключение: то есть трубопровод 1 закрывается, а 2 открывается. Теперь снабжение воздуха из центрального резервуара прекращается и воздух из тормозного цилиндра выбрасывается в атмосферу. Давление и тормозной момент уменьшаются до тех пор, пока $s > s_1$.

При $s = s_1$ происходит обратное переключение: трубопровод 2 закрывается, а 1 открывается. Так проводим интегрирование и повторяем циклы до тех пор, пока значения переменных при двух последовательных переключениях при $s = s_1$ отличаются более чем на 1%.

При интегрировании считалось что периодический режим найден, если $\max(\xi_{\tau_f} - \xi_{\tau_0}, \dot{\xi}_{\tau_f} - \dot{\xi}_{\tau_0}, l_{\tau_f} - l_{\tau_0}, \omega_{\tau_f} - \omega_{\tau_0}) \leq 0.01$. То есть значения всех переменных повторяются через некоторый интервал времени с относительной погрешностью 1%. На основании этого будем считать найденное решение за периодическое.

За начало периодического режима может выбираться любая точка на траектории. Используем в качестве начальных условий $x_{p_0} =$

$(l_{p_0}, \xi_{p_0}, \dot{\xi}_{p_0}, \omega_{P_0})$ значения переменных на одной из границ. Так будет удобно для установления начала и конца цикла. Примем за начало цикла момент τ_0 , при котором $s = s_1$.

На первом этапе цикла s увеличивается до значения s_2 . Производится переключение. Момент переключения обозначим τ_1 . Решение меняет направление и s уменьшается до тех пор, пока не достигает снова начальных условий в момент времени τ_f , как показано на рис. 3.5.

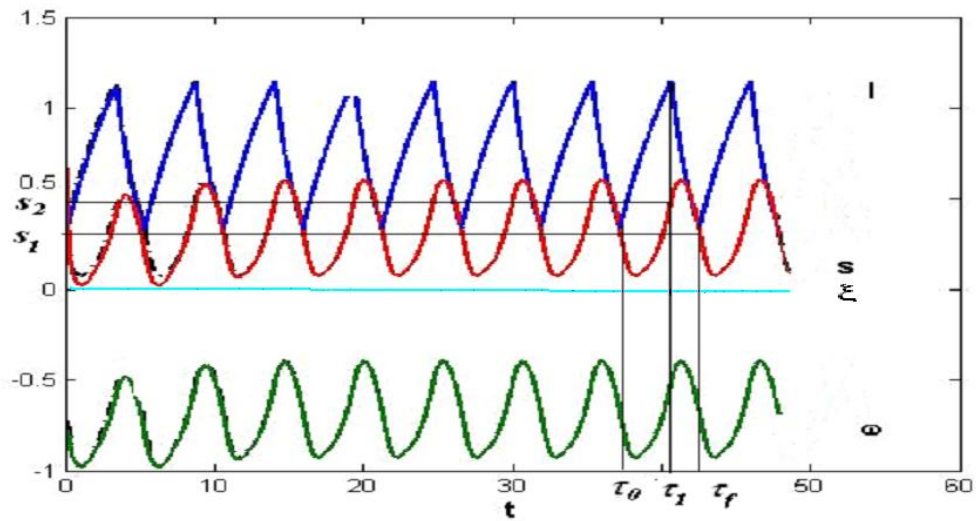


Рис. 3.5: Система с обратной связей

В итоге описан алгоритм определения начальных условий и соответствующих значений интервалов времени Δ_1 и Δ_2 для периодического режима с минимальным и максимальным значениями s равными s_1 и s_2 .

Всевозможные значения $\Delta_1, \Delta_2, \xi_{p_0}, \dot{\xi}_{p_0}, l_{p_0}, \omega_{p_0}$ получим решая задачу для различных пар s_1 и s_2 из интервала s_{1min} и s_{2max} , так что значения $\varphi(s_{1min}) = \varphi(s_{2max}) = 0.9$. Они равны $s_{1min} = 0.12$ и $s_{2max} = 0.5$. Область полученных значений $\Delta_1, \Delta_1 + \Delta_2 = T_{\Pi}$, показана на рис. 3.6. Та же область на плоскости скважность $\frac{\Delta_2}{T_{\Pi}}$ - полный период T_{Π} показана на рис. 3.7.

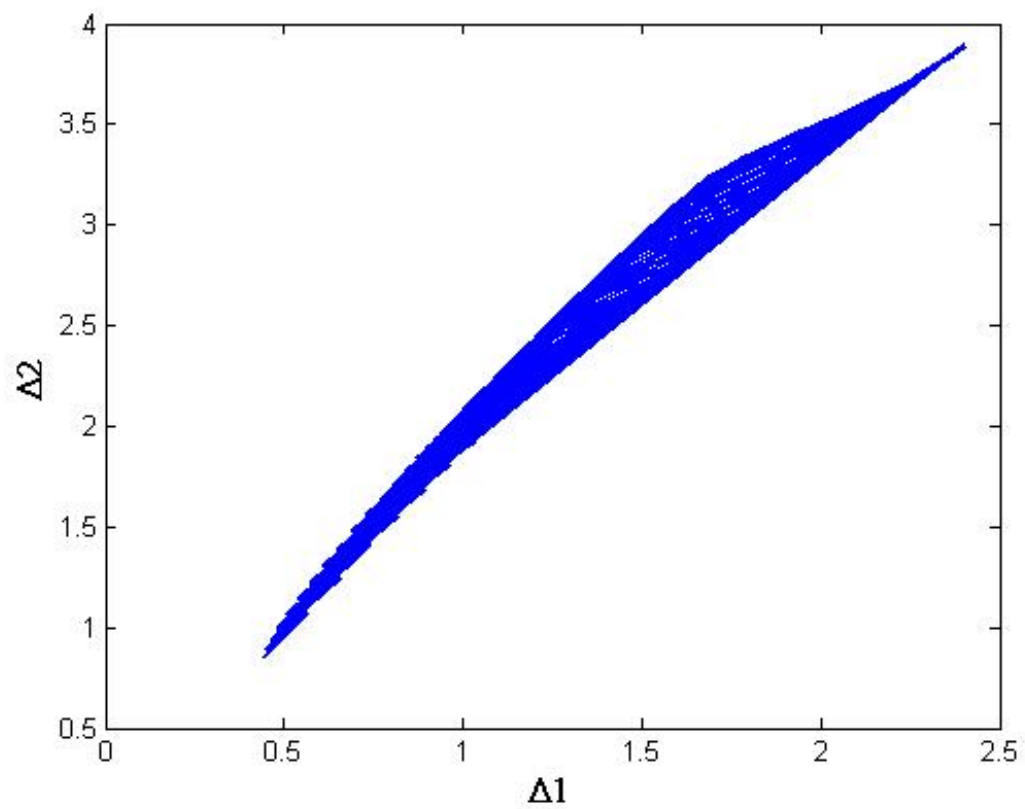


Рис. 3.6: Область интервалов времени между переключениями, для которых существует периодическое решение системы при $\nu = 0.8$

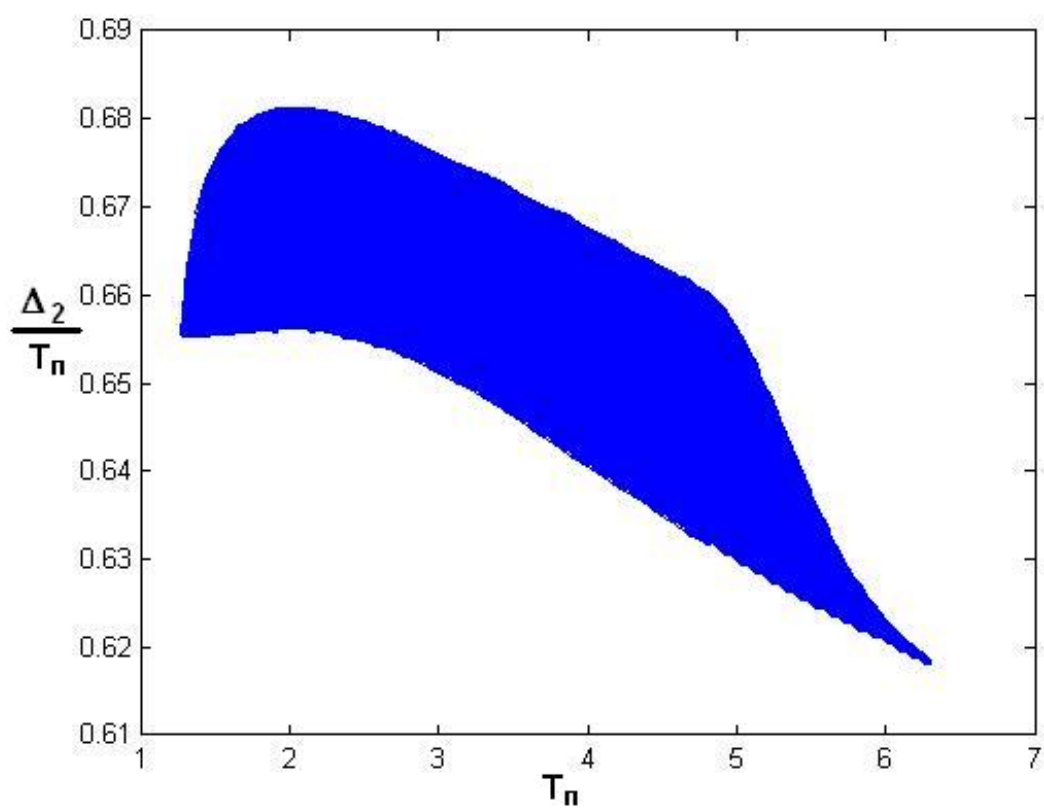


Рис. 3.7: Область, в которой существуют периодические решения на плоскости скважность-период

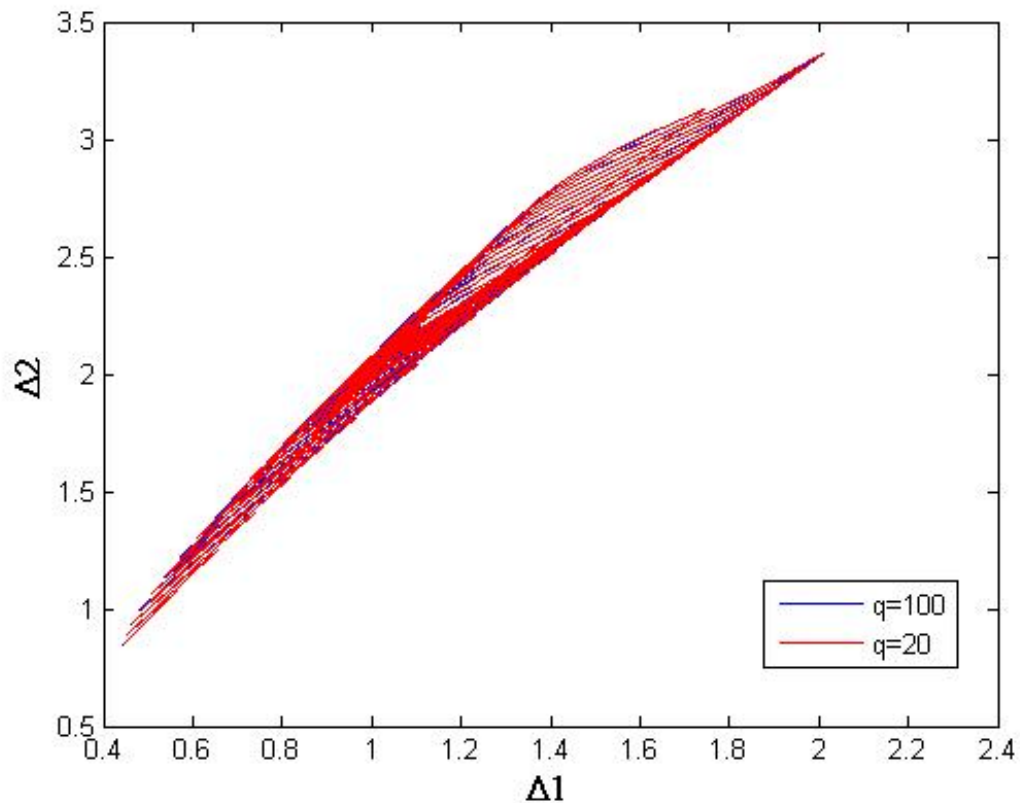


Рис. 3.8: Область, в которой существуют периодические решения для различных значений q

Так как параметры p и q в модели шины известны с точностью до порядка, исследована зависимость периодического режима от этих параметров.

Отмечено, что результаты слабо зависят от параметров p и q . Изменение их на порядок сохраняет область существования периодических решений (см. рис. 3.8, 3.9).

Отметим, что в силу инерционности решение системы (3.1)-(3.3) выходит за заданные границы. Такое поведение показано на рис. 3.5. Для больших интервалов времени такой эффект увеличивается, но периодическое поведение сохраняется.

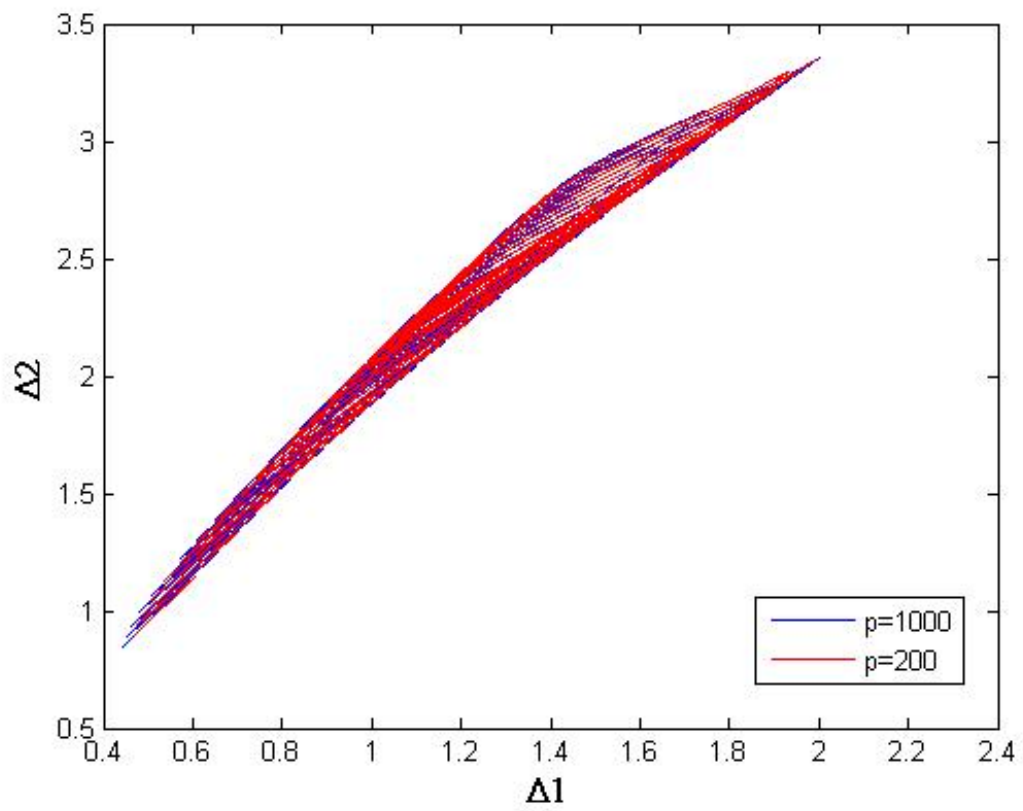


Рис. 3.9: Область, в которой существуют периодические решения для различных значений p

Поскольку исследование приближенной характеристики $\varphi(s)$ справедливо только при $\varphi(s) \geq 0.9$, в интервале $[0.12, 0.5]$ область существования периодических решений уменьшается. На рис. 3.10, 3.11, 3.12 показаны области, в которых решение справедливо в рамках приближения функции $\varphi(s)$.

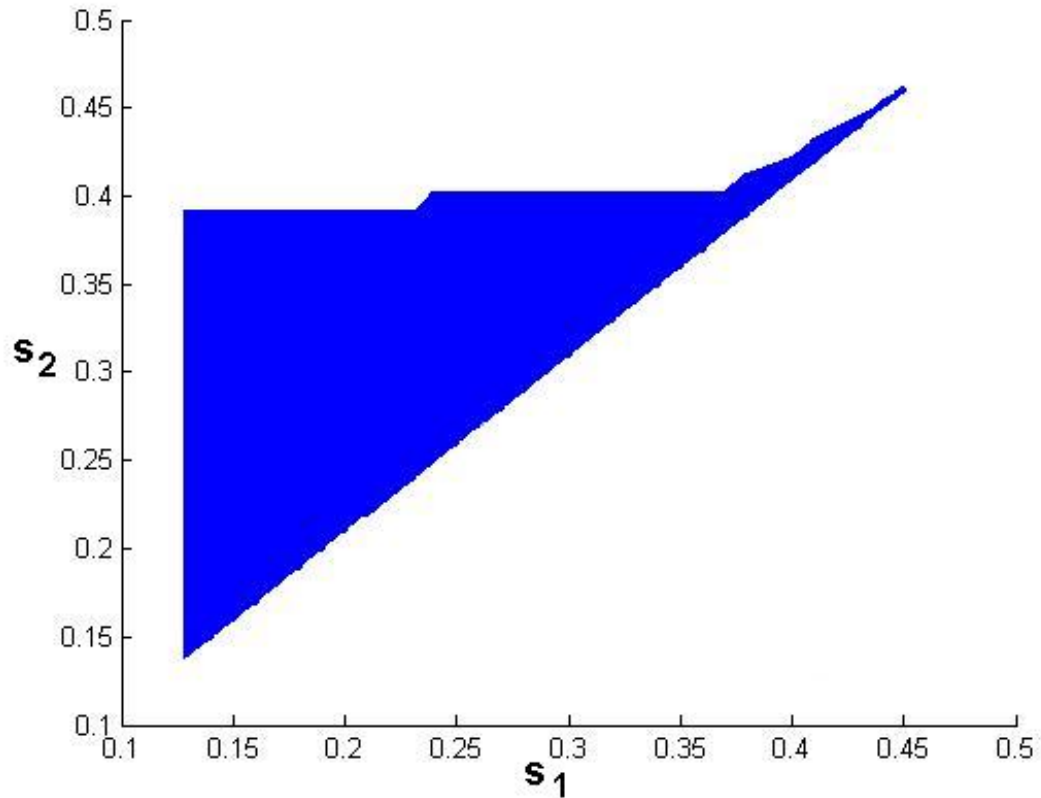


Рис. 3.10: Область существования периодического решения системы (3.1)-(3.3) для $\nu = 0.8$, при котором $\varphi(s) > 0.9$

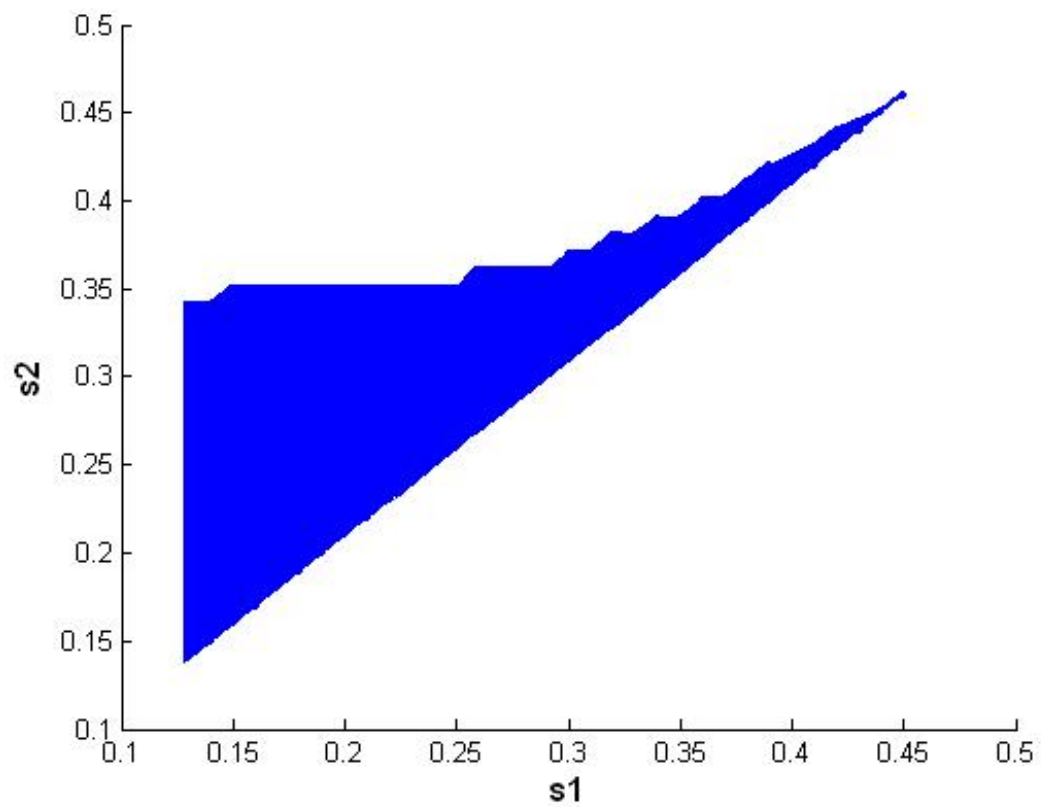


Рис. 3.11: Область существования периодического решения системы (3.1)-(3.3) для $\nu = 0.5$, при котором $\varphi(s) > 0.9$

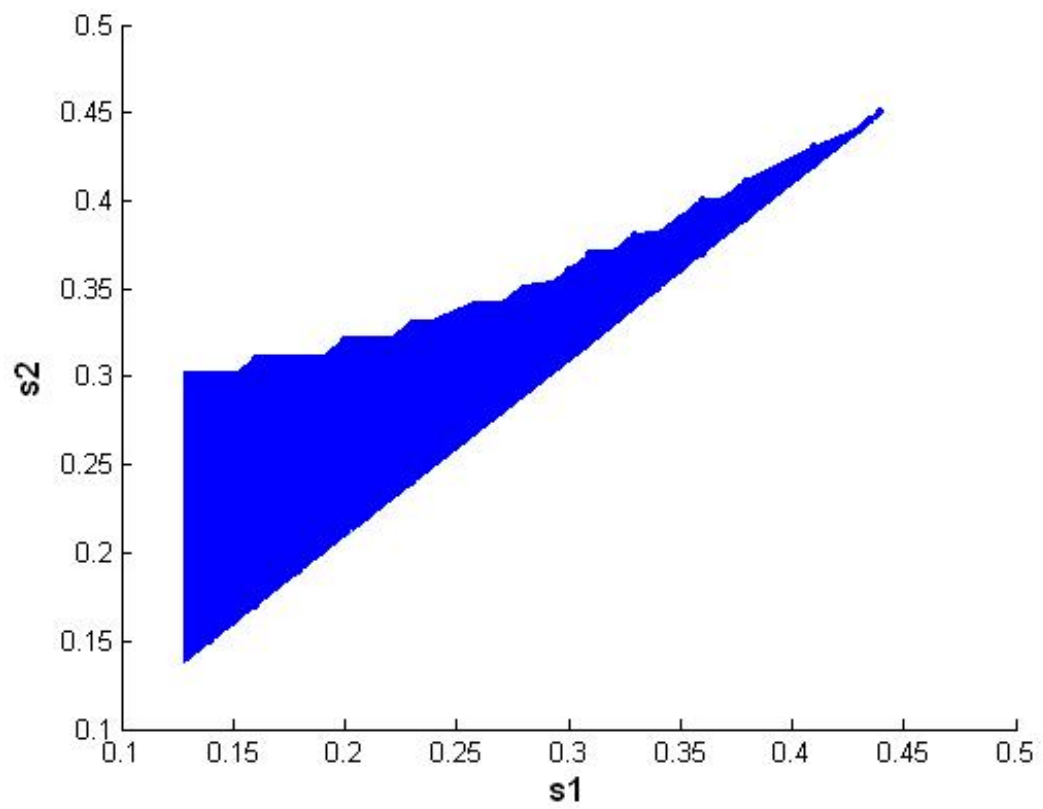


Рис. 3.12: Область существования периодического решения системы (3.1)-(3.3) для $\nu = 0.3$, при котором $\varphi(s) > 0.9$

3.3 Уравнения в отклонениях и устойчивость периодических решений

Исследуем устойчивость полученных периодических решений.

Систему уравнений (3.1)-(3.3) представим в следующем виде:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (3.4)$$

где

$$x = \begin{bmatrix} l \\ \omega \\ \xi \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}$$

Рассмотрим управление периодического типа. На периоде $[\tau_0, \tau_f]$, на заданном интервале времени $\Delta_1 = \tau_1 - \tau_0$ первый трубопровод открыт, а второй закрыт, на интервале $\Delta_2 = \tau_f - \tau_1$ - наоборот. На основании результатов предыдущего параграфа можно видеть, что для такого управления существует периодическое решение x_p системы (3.1)-(3.3). Для начальных условий, найденных в предыдущем параграфе, проанализируем устойчивость периодического решения. Рассмотрим решение с начальными условиями близкими к x_p . Необходимо узнать, останется ли это решение в окрестности x_p для всех t , будет стремиться к x_p , или ошибка будет увеличиваться до ∞ .

Представим произвольное решение x в окрестности периодического режима

$$x = x_p + x_\Delta. \quad (3.5)$$

Тогда

$$\dot{x} = \dot{x}_p + \dot{x}_\Delta = f(x_p, t) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_p} x_\Delta + \dots$$

Так как x_p - решение системы (3.4)

$$\dot{x}_p = f(x_p, t) \quad (3.6)$$

следовательно, в силу (3.6), сохраняя линейные члены по x_Δ , получим

$$\dot{x}_\Delta = \left. \frac{df(x, t)}{dx} \right|_{x=x_p} x_\Delta. \quad (3.7)$$

Поведение решения системы (3.4) в окрестности x_p определяется поведением решения (3.5) в окрестности $x_\Delta = 0$. Таким образом, можно исследовать устойчивость решения $x_\Delta = 0$ (3.7) вместо устойчивости решения $x = x_p$ системы (3.4) [25].

Запишем линеаризованные уравнения в отклонениях вида (3.7) для уравнений (3.1)-(3.3).

Для ω_Δ из (3.2) имеем

$$\frac{d(\omega_p + \omega_\Delta)}{dt} = (l_p + l_\Delta) - \nu\varphi(s_p + s_\Delta).$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{d\omega_p}{dt} + \frac{d\omega_\Delta}{dt} = l_p + l_\Delta - \nu(\varphi(s_p) + g(s_p)s_\Delta), \quad (3.8)$$

где

$$g(s) = \frac{\partial\varphi(s)}{\partial s} = \frac{(a_1a_4 - a_2)s^2 + (2a_1a_5 - 2a_3)s + a_2a_5 - a_3a_4}{(s^2 + a_4s + a_5)^2}. \quad (3.9)$$

Для периодической переменной ω_p в соответствии с (3.2)

$$\frac{d\omega_p}{dt} = l_p - \nu\varphi(s_p), \quad (3.10)$$

где

$$s_p = 1 + \omega_p + \dot{\xi}_p$$

Подставим (3.10) в (3.8) и получим

$$\frac{d\omega_{\Delta}}{dt} = l_{\Delta} - \nu g(s_p)s_{\Delta}. \quad (3.11)$$

Для ξ_{Δ} из (3.1) запишем уравнение

$$\frac{d^2(\xi_p + \xi_{\Delta})}{dt^2} = -q \frac{d(\xi_p + \xi_{\Delta})}{dt} - p(\xi_p + \xi_{\Delta}) - \nu k \varphi(s_p + s_{\Delta}) - \frac{d(\omega_p + \omega_{\Delta})}{dt}. \quad (3.12)$$

Перепишем его в виде

$$\frac{d^2\xi_p}{dt^2} + \frac{d^2\xi_{\Delta}}{dt^2} = -q \left(\frac{d\xi_p}{dt} + \frac{d\xi_{\Delta}}{dt} \right) - p(\xi_p + \xi_{\Delta}) - \nu k (\varphi(s_p) + g(s_p)s_{\Delta}) - \frac{d\omega_p}{dt} - \frac{d\omega_{\Delta}}{dt}. \quad (3.13)$$

Получим

$$\frac{d^2\xi_{\Delta}}{dt^2} = -q \frac{d\xi_{\Delta}}{dt} - p\xi_{\Delta} - \nu k g(s_p)s_{\Delta} - \frac{d\omega_{\Delta}}{dt}. \quad (3.14)$$

Для l_{Δ} из (3.1) имеем

$$\frac{T_e}{T_3} \frac{d(l_p + l_{\Delta})}{dt} = \frac{K_l P_m}{L_*} - (l_p + l_{\Delta}). \quad (3.15)$$

Переписываем как

$$\frac{dl_p}{dt} + \frac{dl_{\Delta}}{dt} = \frac{T_3}{T_e} \left(\frac{K_l P_*}{L_*} - (l_p + l_{\Delta}) \right) \quad (3.16)$$

и получим уравнение в отклонениях

$$\frac{dl_{\Delta}}{dt} = -\frac{T_3}{T_e} l_{\Delta}. \quad (3.17)$$

Таким образом, уравнения (3.7) для отклонения решений уравнений (3.1)-(3.3) от периодического решения (l_p, s_p, ω_p) имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_{\Delta}}{dt} &= l_{\Delta} - \nu g(s_p) s_{\Delta} \\
\frac{d^2\xi_{\Delta}}{dt^2} &= -q \frac{d\xi_{\Delta}}{dt} - p\xi_{\Delta} - \nu k g(s_p) s_{\Delta} - \frac{d\omega_{\Delta}}{dt} \\
\begin{cases} \frac{dl_{\Delta}}{dt} = -\frac{T_3}{T_{e_{in}}} l_{\Delta} & \text{трубопровод 1 открыт} \\ \frac{dl_{\Delta}}{dt} = -\frac{T_3}{T_{e_{out}}} l_{\Delta} & \text{трубопровод 2 открыт} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

3.4 Анализ устойчивости периодического решения

Система уравнений (3.18) представляет собой систему с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [11]

$$\frac{dx}{dt} = Q(t)x \tag{3.19}$$

где x - вектор длины n , $Q(x)$ - матрица размерности $n \times n$, элементы $Q_{ij}(t)$ которой являются непрерывными периодическими функциями времени t с одним и тем же периодом ϖ , то есть $Q(t + \varpi) = Q(t)$.

Матрица n линейно независимых решений системы (3.19)

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

называется фундаментальной матрицей.

Фундаментальная система решений удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$x_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.21)$$

то есть $X(0) = E$.

Фундаментальная матрица $X(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dX(t)}{dt} = Q(t)X(t) \quad (3.22)$$

с начальным условием (3.21).

Поскольку матрица $Q(t)$ периодическая, матрица $X(t + \varpi)$ тоже удовлетворяет уравнению (3.22), и можно выражать ее через фундаментальную матрицу следующим образом:

$$X(t + \varpi) = X(t)C, \quad \text{где} \quad C = \text{const}. \quad (3.23)$$

При $t = 0$ в (3.23) получим

$$C = X(\varpi)$$

матрица $X(\varpi)$ называется матрицей монодромии [8].

Составим характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = \det(\lambda E - X(\varpi)) = 0 \quad (3.24)$$

$$D(\lambda) = \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + \dots + A_{n-1} \lambda + A_n = 0 \quad (3.25)$$

По формуле Ливилля получим член A_n [2].

$$A_n = (-1)^n \exp \int_0^{\varpi} \text{Sp} Q(t) dt, \quad (3.26)$$

где $\text{Sp} Q(t) = \sum_{k=1}^n q_{kk}(t)$.

Корни характеристического уравнения (3.24) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ называются мультипликаторами, а величины

$$a_k = \frac{1}{T} \ln \lambda_k \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.27)$$

называются характеристическими показателями. Для систем с периодическими коэффициентами характеристические показатели играют роль собственных значений фундаментальной матрицы для систем с постоянными коэффициентами.

Условия устойчивости системы (3.19) по Ляпунову даются теоремой [6], [2]

Теорема 2. *Линейная однородная периодическая система с непрерывной матрицей устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы λ_i расположены внутри замкнутого единичного круга $|\lambda| \leq 1$, причем мультипликаторы, лежащие на окружности $|\lambda| = 1$, имеют простые элементарные делители, если их рассматривать как собственные значения соответствующей матрицы монодромии.*

Теорема 3. *Для асимптотической устойчивости периодической системы необходимо и достаточно, чтобы все мультипликаторы ее находились внутри единичного круга $|\lambda| < 1$.*

В общем случае трудно построить матрицу монодромии, но поскольку имеем полную информацию о начальных условиях периодической системы, будем строить матрицу монодромии численно. Решаем систему в отклонениях для каждого периодического решения, полученного в **3.3**.

В качестве начальных условий для отклонений используем векторы

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Из решений для каждого начального условия построим матрицу монодромии, которая дает нам информацию о изменении значений переменных на интервале времени $\Delta_1 + \Delta_2 = T_{\text{п}}$.

Периодическое решение x_p устойчиво, если собственные значения матрицы монодромии (мультипликаторы) лежат внутри единичного круга. Если хотя бы один из них лежит вне единичного круга, то решение неустойчиво.

В нашем случае максимальные мультипликаторы лежат в диапазоне $[0.1, 2.8]$, то есть, существуют неустойчивые периодические решения.

Распределение собственных значений над плоскостями параметров s_1, s_2 показано на рис. 3.13, 3.14.

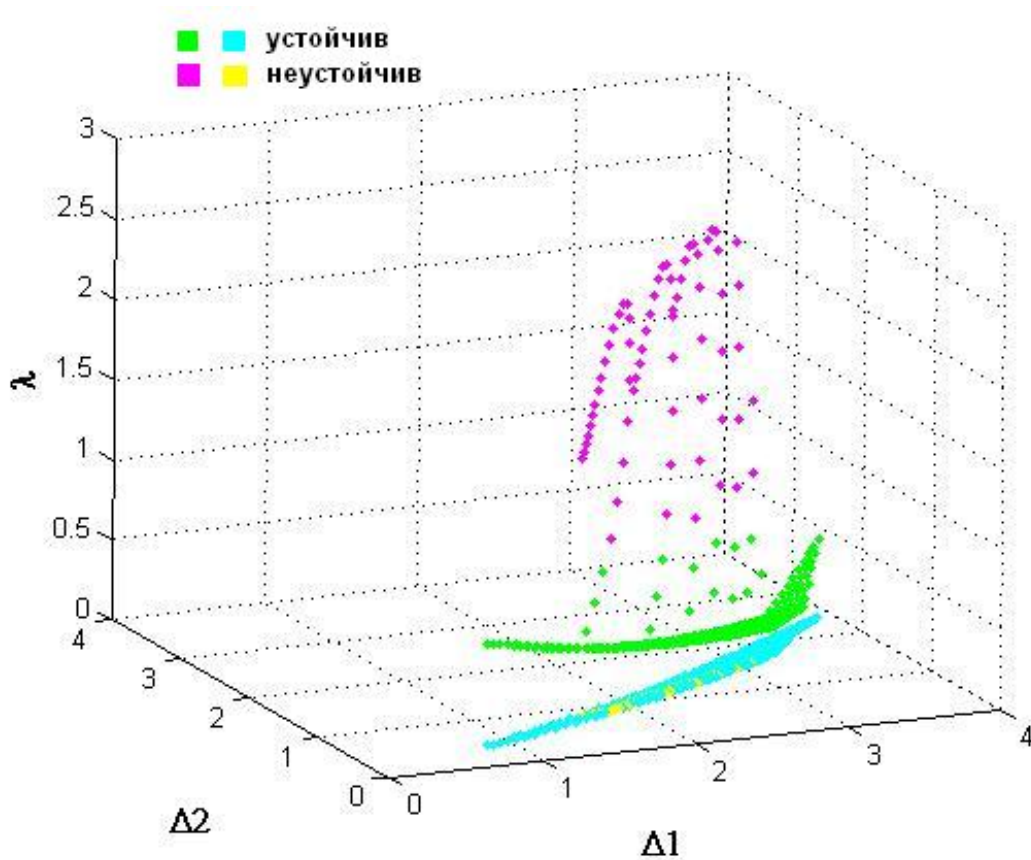


Рис. 3.13: Собственные значения системы в отклонениях

На рис. 3.15 и 3.16 показаны мультипликаторы системы в случае, когда коэффициент трения $\nu = 0.5$ и $\nu = 0.3$ соответственно. Отмечено,

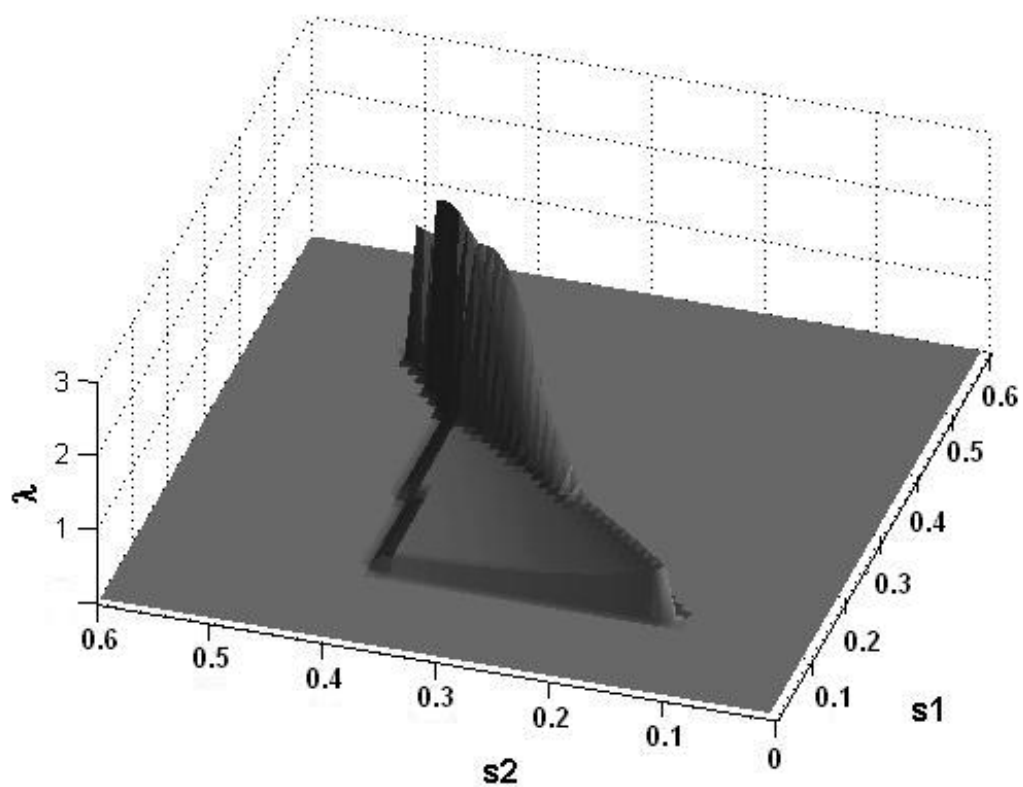


Рис. 3.14: Собственные значения системы в отклонениях

что область существования периодических решений расширяется, когда коэффициент трения ν увеличивается, также как относительный размер области устойчивых периодических режимов.

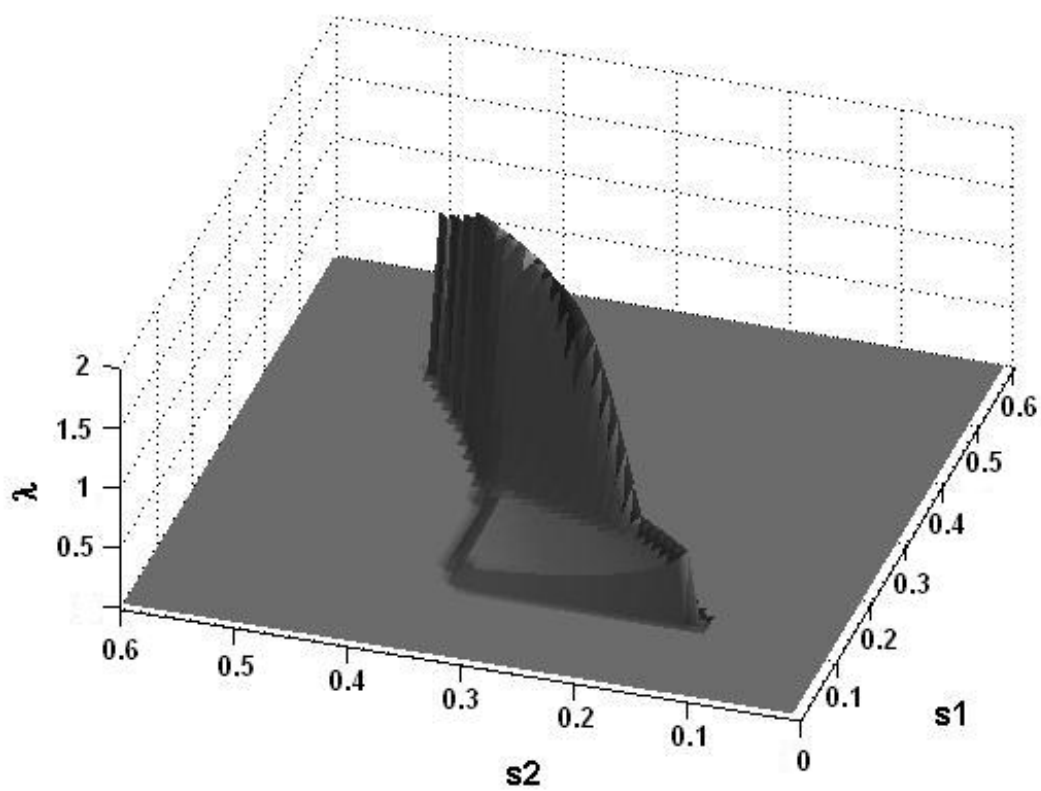


Рис. 3.15: Собственные значения системы в отклонениях для $\nu = 0.5$

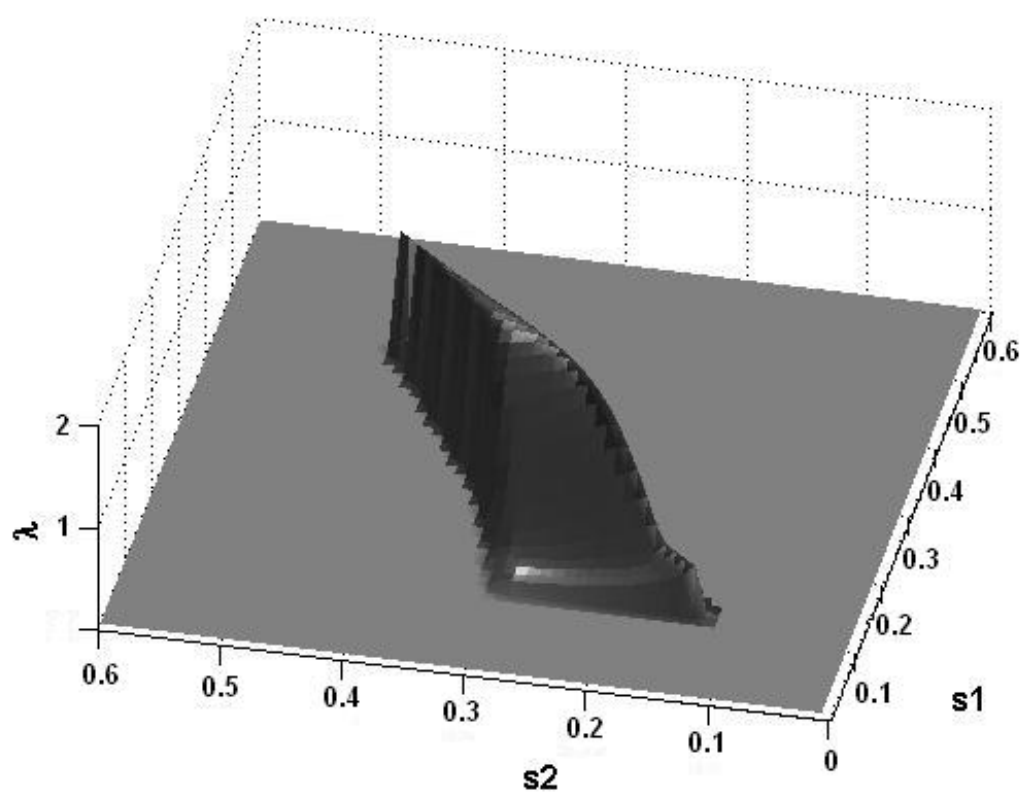


Рис. 3.16: Собственные значения системы в отклонениях для $\nu = 0.3$

Хотя существуют неустойчивые решения, надо подчеркнуть, что мультипликаторы близки к единичной окружности, это значит - разница между значениями начальных условий и значениями переменных после периода будет не так велика. Так что даже для неустойчивых решений, физическая система имеет характернее поведение близкое к периодическому. В этом случае мы можем сказать, что система слабо неустойчива.

Представление и анализ областей устойчивости удобно провести отобразив область с плоскости $\Delta_1 - \Delta_2$ на плоскостью параметров $s_1 - s_2$. На рис. 3.17, 3.18, 3.19 показаны устойчивые интервалы времени для различных значений коэффициента трения в этой плоскости.

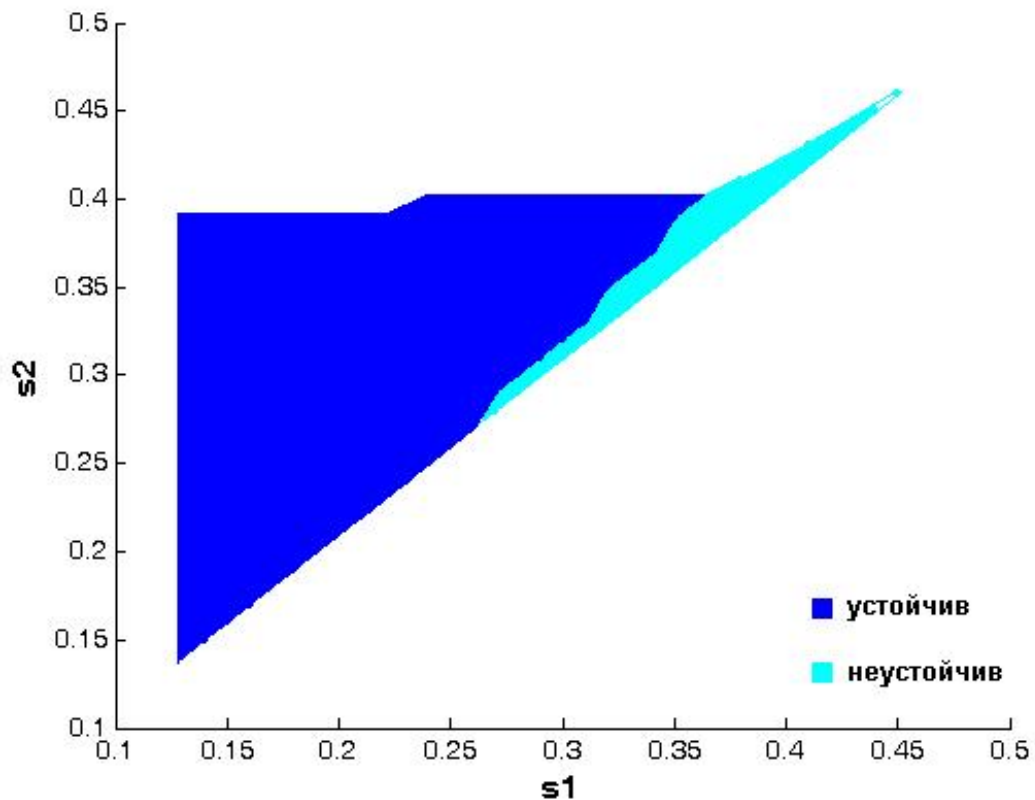


Рис. 3.17: Интервалы времени устойчивых решений для $\nu = 0.8$

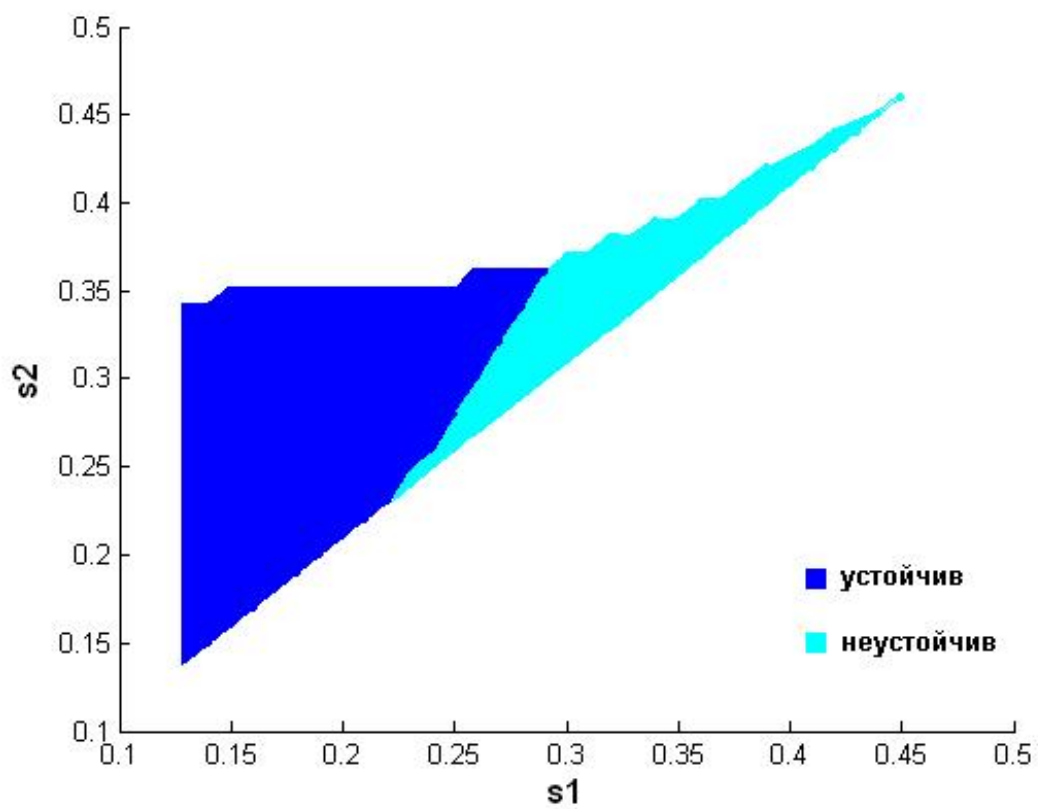


Рис. 3.18: Интервалы времени устойчивых решений для $\nu = 0.5$

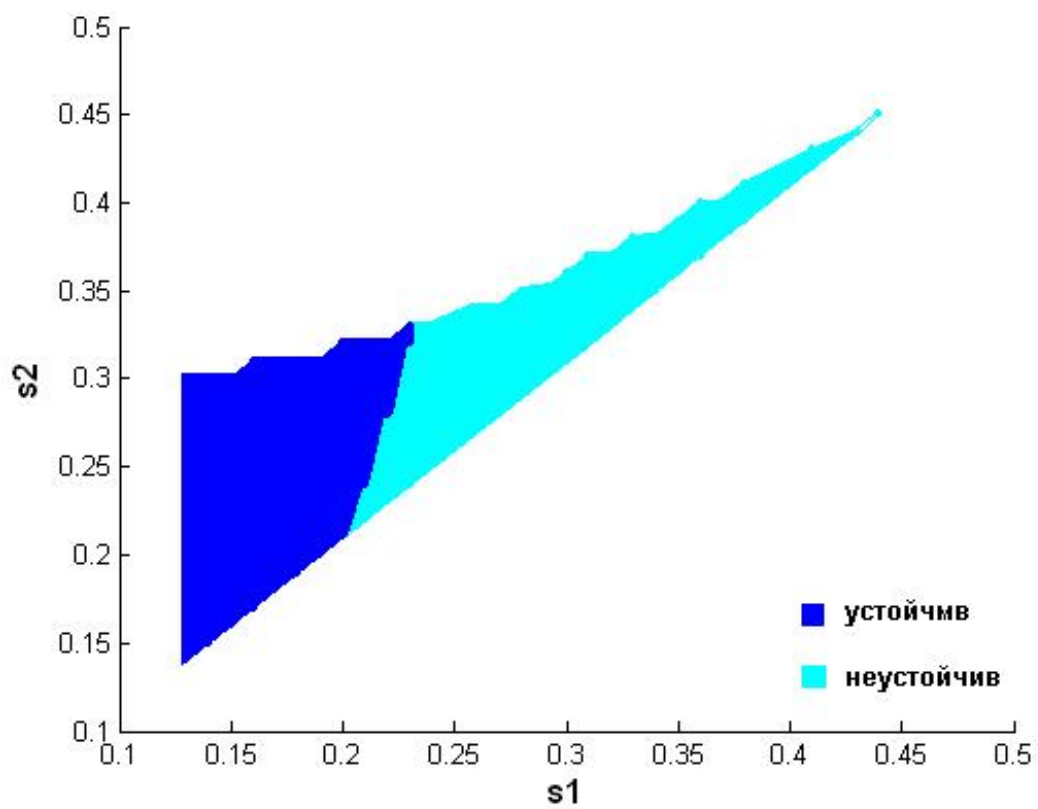


Рис. 3.19: Интервалы времени устойчивых решений для $\nu = 0.3$

На рис. 3.20 показано типичное поведение системы при устойчивых периодических режимах.

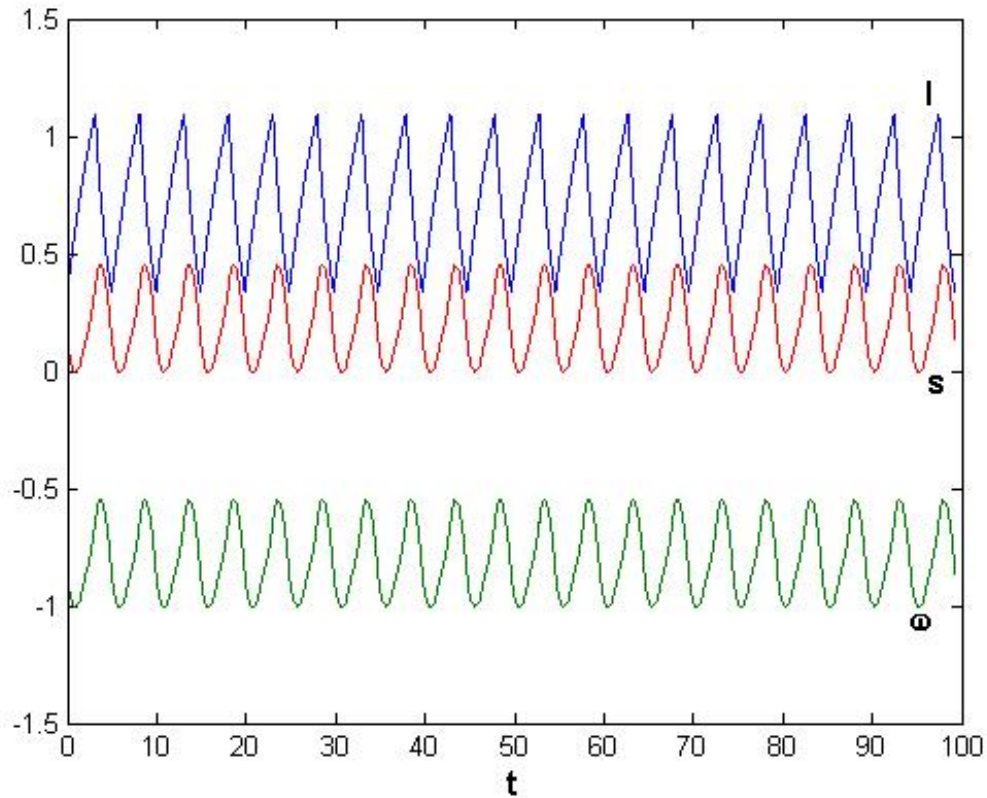


Рис. 3.20: Устойчивый периодический режим для $\nu = 0.8$

На рис. 3.21 показано поведение системы при неустойчивом периодическом режиме. В случае, когда $\nu = 0.3$ после нескольких циклов нарушение периодичности обнаруживается зрительно, однако на коротких временах режим близок к периодическому.

В рис. 3.22, 3.23 показано поведение системы при малых отклонениях от начальных условий периодического режима. Рассмотрены случаи для различных величин отклонения начальных условий.

При отклонениях от начальных условий периодического режима до 10% система достигает периодического режима через несколько циклов для специфического режима $\Delta_1 = 1.29$, $\Delta_2 = 2.56$. Одновременное отклонение всех переменных на величины больше

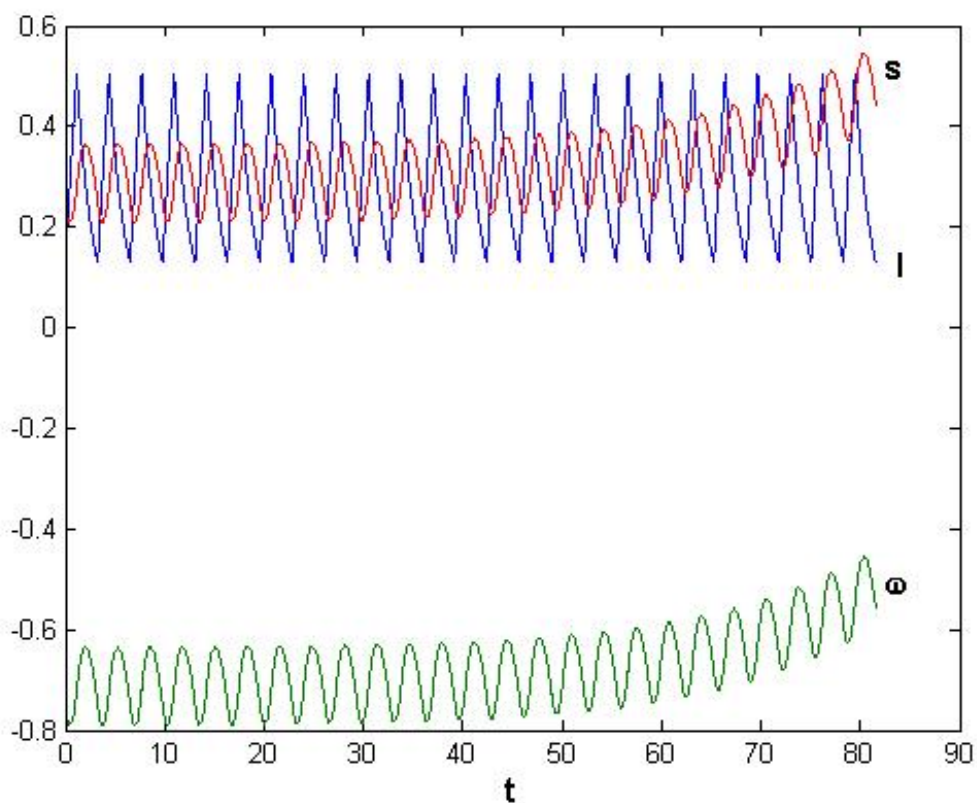


Рис. 3.21: Неустойчивый периодический режим для $\nu = 0.3$

этого значения порождают нарушение устойчивости, в связи с этим представляется важной задача отыскания области притяжения для найденных периодических решений. Проведенный анализ позволяет грубо оценить размер этой области и утверждать, что ошибка начальных условий для сохранения периодического режима может составлять десятки процентов.

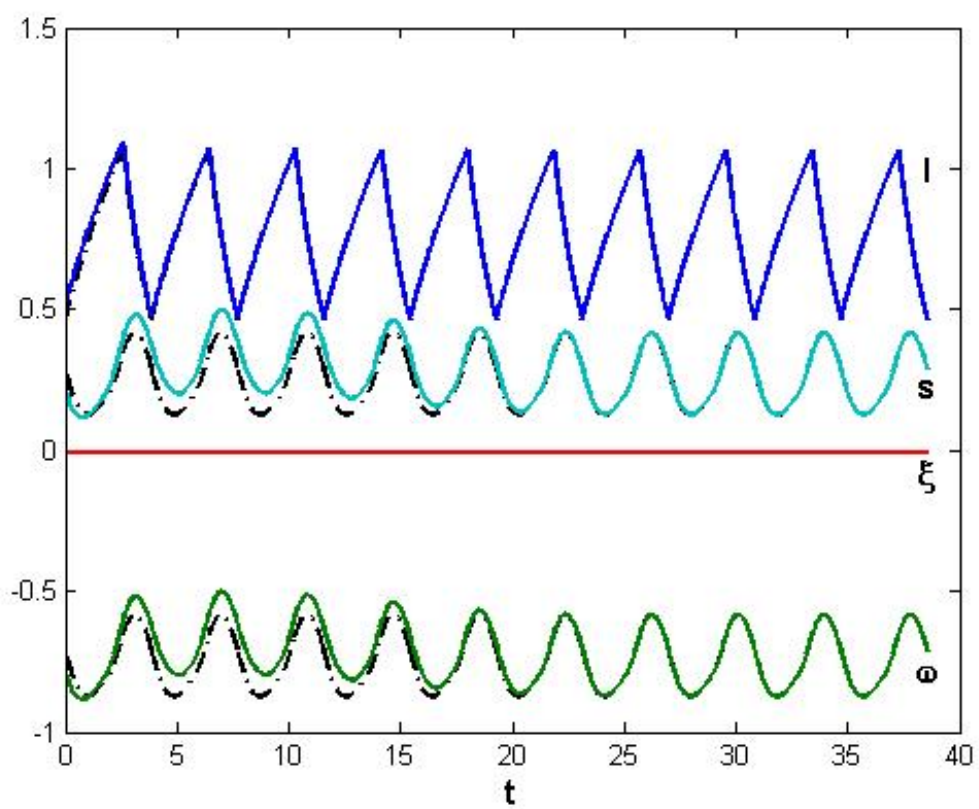


Рис. 3.22: Поведение системы при отклонении всех переменных от начальных условий на 10%

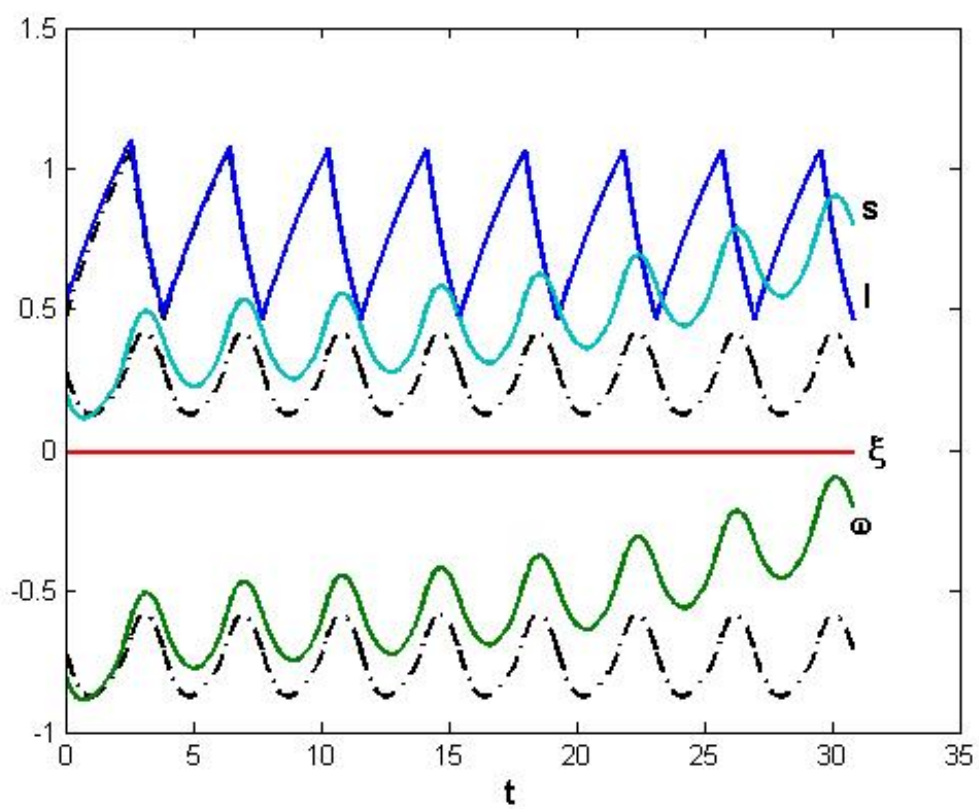


Рис. 3.23: Поведение системы при отклонении всех переменных от начальных условий на 12%

3.5 Сравнение результатов для различных типов дорожной поверхности

Изменение области существования периодических решений для различных коэффициентов трения ν показано в рис. 3.24. Чем больше уменьшается значение коэффициента трения, тем больше увеличиваются интервалы времени периодических режимов.

При снижении значений коэффициента трения область существования периодических решений снижается.

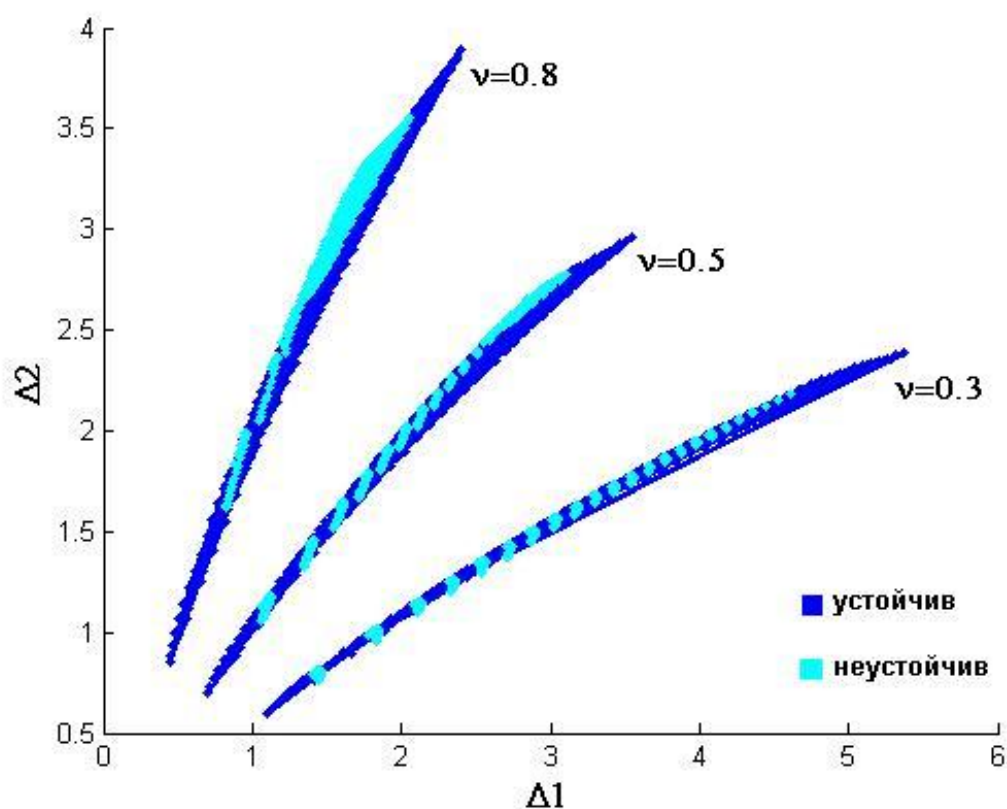


Рис. 3.24: Область существования периодических режимов для различных значений коэффициента трения ν

В рис. 3.25 показаны результаты расчетов максимальных мультипликаторов в случае, когда параметры периодического

режима для коэффициента трения $\nu = 0.8$ используется в дороге с коэффициентом трения $\nu = 0.7$. Значения максимальных мультипликаторов уменьшается для быстрых переключений.

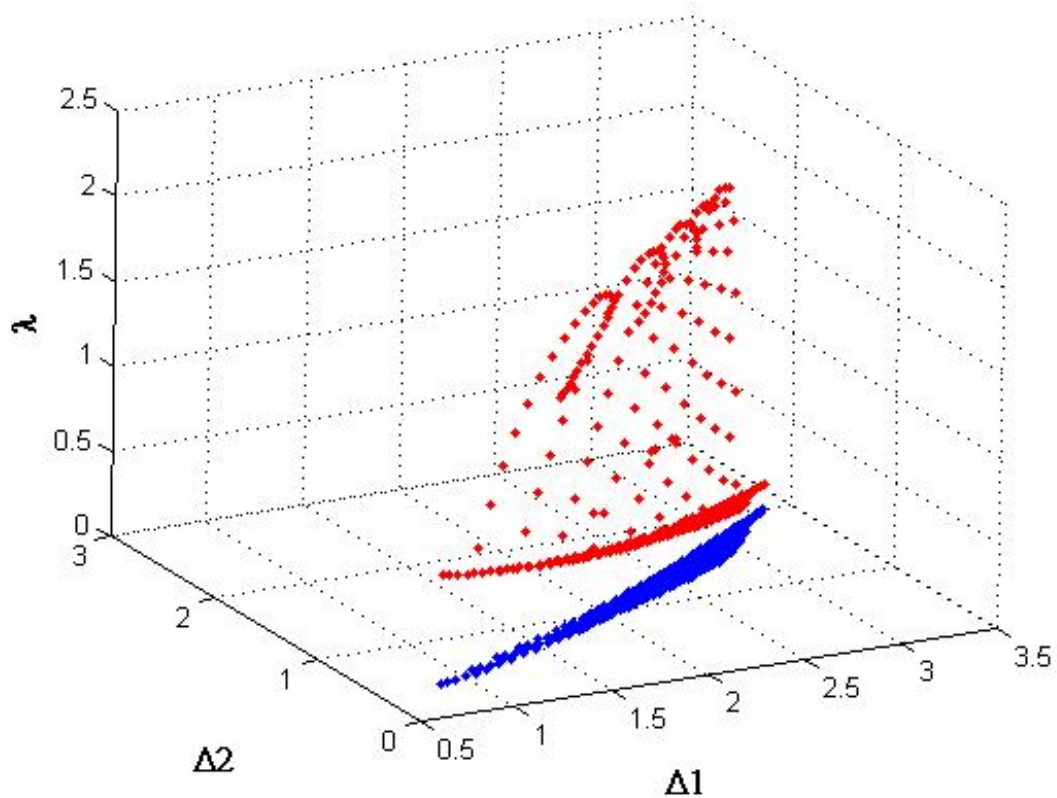


Рис. 3.25: периодические режимы для коэффициента трения $\nu = 0.8$, а система работает когда коэффициент трения $\nu = 0.7$

Приведенный расчет позволяет только косвенно судить о поведении системы в рассмотренном случае, так как режим с коэффициентами, рассчитанными для $\nu = 0.8$, не является периодическим при $\nu = 0.7$.

Рассмотрим поведение системы при малых отклонениях для различных значений коэффициента трения в устойчивых режимах. В рис. 3.26 показан ответ системы для описанных условий.

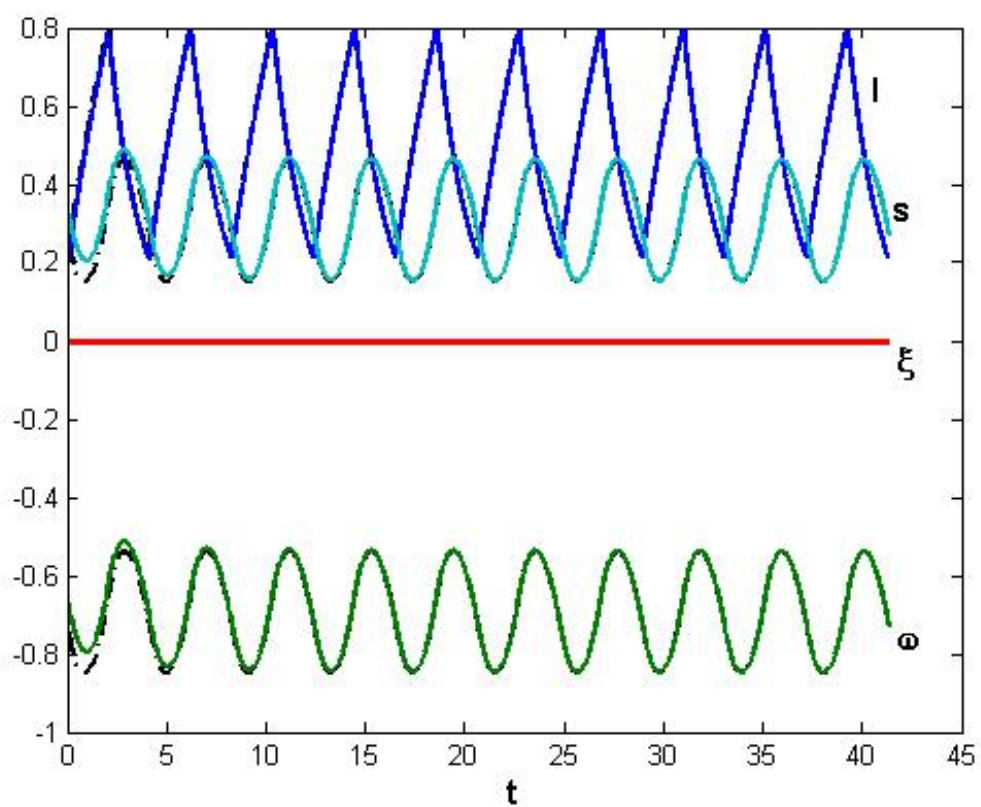


Рис. 3.26: Поведение устойчивого периодического режима при 10%-х отклонениях начальных условий для коэффициента трения $\nu = 0.5$

Рассмотрим поведение система при малых отклонениях для различных значений коэффициента трения в неустойчивых режимах. В рис. 3.27 показано ответ системы для описанных условий.

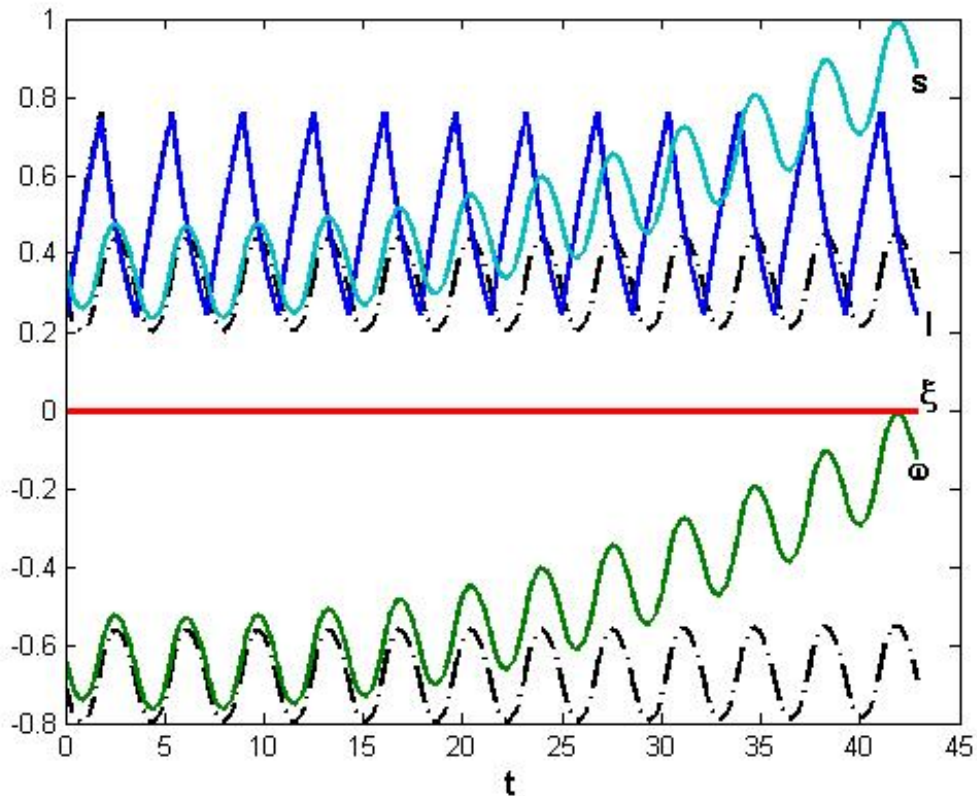


Рис. 3.27: Неустойчивый периодический режим при 10%-х отклонениях от начальных условий для коэффициента трения $\nu = 0.5$

Отмечено, что решение в окрестности неустойчивого режима не достигают периодического режима при малых отклонениях, при которых устойчивые режимы достигают периодических окрестности периодического решения. После нескольких циклов угловая скорость вращения колеса при отклонениях стремится к нулю.

Теперь рассмотрим случай, когда меняются условия дороги, то есть коэффициент трения ν меняется, во время движения. Результат расчета

приведен на рис. 3.28 при изменении ν с 0.8 до 0.78, на рис. 3.29 при изменении ν с 0.5 до 0.48, на рис. 3.30 и для таких же начальных условий при изменении ν с 0.5 до 0.52 для устойчивого периодического режима, на рис. 3.31 при изменении ν с 0.3 до 0.28 и для таких же начальных условий при изменении ν с 0.3 до 0.32.

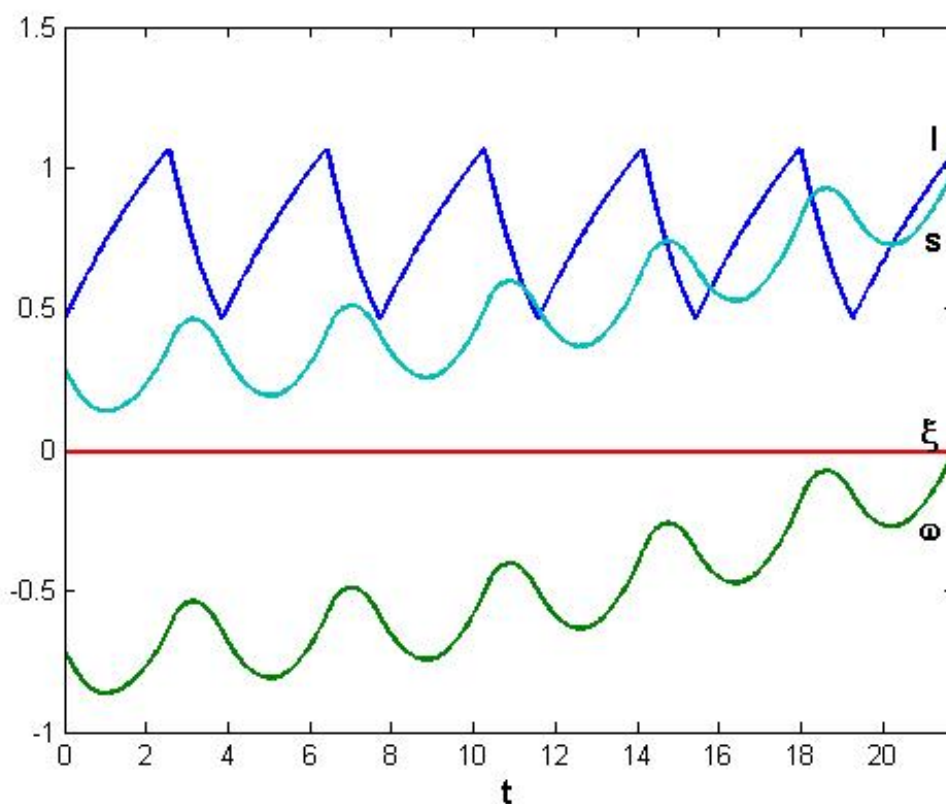


Рис. 3.28: Для дороги $\nu = 0.78$ взяты параметры периодического режима, рассчитанного для $\nu = 0.8$

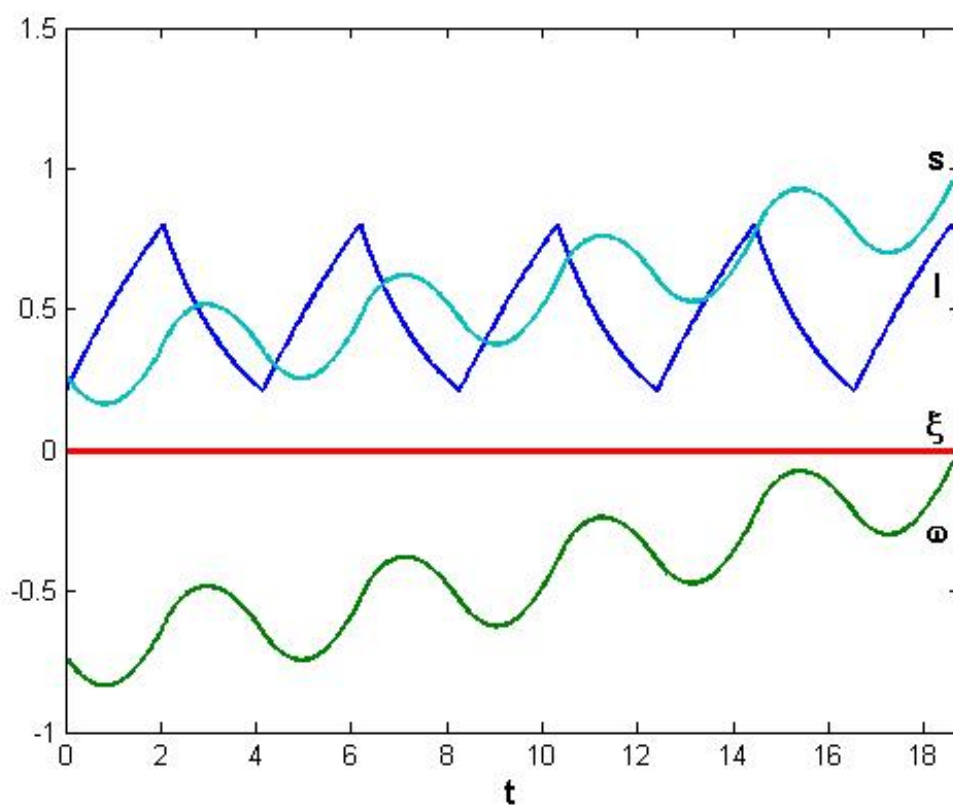


Рис. 3.29: Для дороги $\nu = 0.48$ взяты параметры периодического режима, рассчитанного для $\nu = 0.5$

Отсюда заметим, что при изменениях коэффициента трения системы периодичность режима быстро теряется, когда дорога становится более скользкой, даже для устойчивых периодических режимов. то есть, в реальных ситуациях существует возможность блокировки колеса. Однако на коротких временах (порядка десятых долей секунды) в системе можно наблюдать движения колебательного характера.

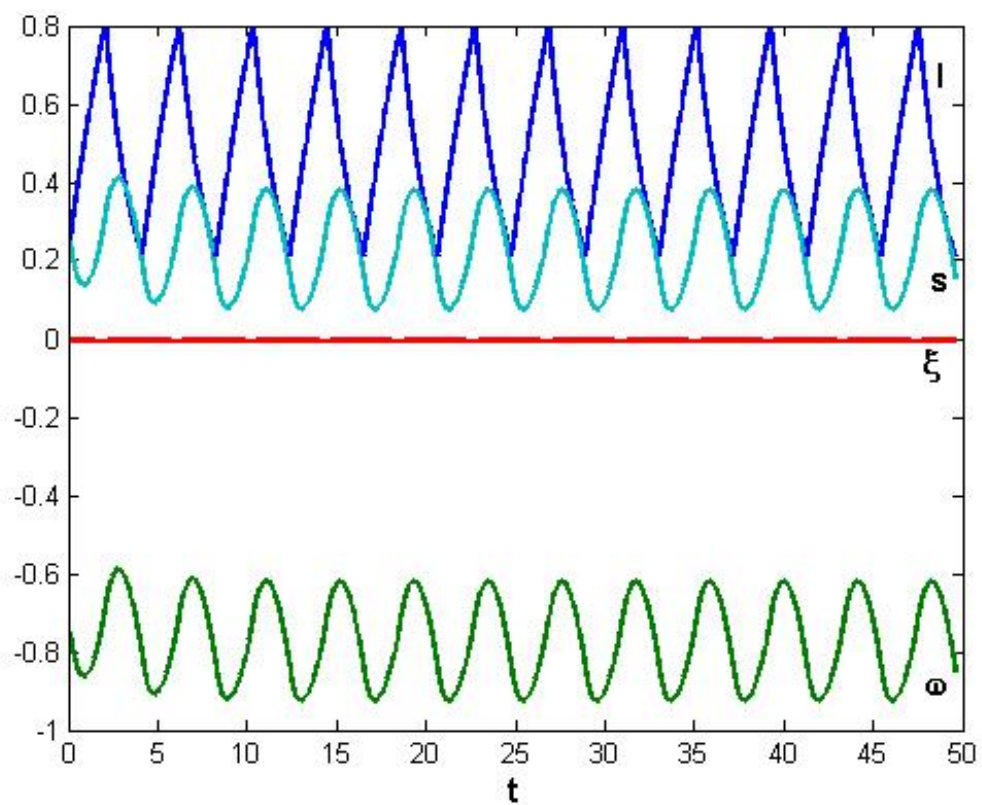


Рис. 3.30: Для дороги $\nu = 0.52$ взяты параметры периодического режима, рассчитанного для $\nu = 0.5$

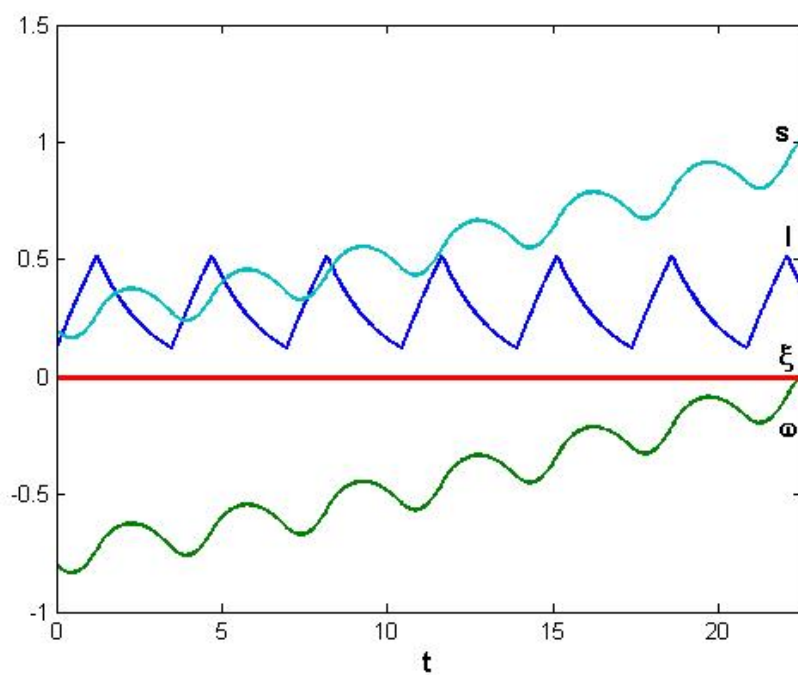


Рис. 3.31: Для дороги $\nu = 0.28$ взяты параметры периодического режима, рассчитанного для $\nu = 0.3$

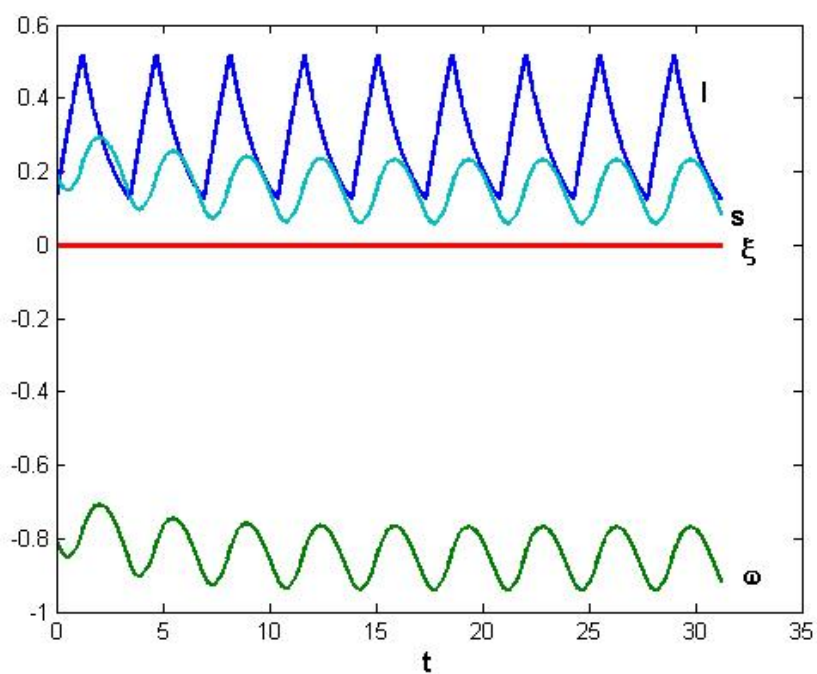


Рис. 3.32: Для дороги $\nu = 0.32$ взяты параметры периодического режима, рассчитанного для $\nu = 0.3$

Заключение

- Рассмотрена математическая модель автомобиля, описывающая динамическое поведение корпуса, деформацию шин, вращение колес и изменение давления в тормозной системе.
- Из этой полной модели автомобиля методами фракционного анализа получена упрощенная математическая модель движения колеса автомобиля на характерных временах работы антиблокировочной системы.

Упрощенная модель описывает поведение следующих переменных; угловая скорость вращения колеса, относительное проскальзывание, смещение пятна контакта и момент сил торможения. Величина относительного проскальзывания выражается через эти переменные.

- Рассмотрены периодические решения системы уравнений, описывающей движение автомобильного колеса.

Рассмотрена задача о вынужденных колебательных движениях колес с пневматической антиблокировочной системой, снабженной общим клапаном для впуска и выпуска воздуха.

Решена задача поиска периодических режимов изменения угловой скорости вращения колес при программном переключения клапана. Для этого рассмотрена вспомогательная задача об управлении с обратной связью, в которой переключение клапана происходит при достижении величиной относительного проскальзывания пороговых

значений. Получена информация о периоде и скважности решений и начальных условиях для неизвестных.

- Проведен анализ устойчивости найденных периодических решений. Построена система в отклонениях от периодического решения.

Вычислены компоненты матрицы монодромии, численно получены собственные значения этой матрицы (мультипликаторы), и проверены выполнения условий теоремы Ляпунова.

Максимальные мультипликаторы лежат в диапазоне $[0.1, 2.8]$. Выделены области устойчивых периодических режимов. Показано, что размер области уменьшается при снижении коэффициента сцепления колеса с дорогой. Подказано, что при изменении коэффициента сцепления колеса с дорогой периодический режим разрушается, однако существует область параметров в которой с технической точки зрения движения сохраняет колебательный характер.

Литература

- [1] Гоздек В.С., Гончаренко В.И. *О проверке устойчивости САУ процессом торможения колес*// Промислова Гидраулика і пневматика. №4(6) 2004 с 73-78
- [2] Демидович Б.П., *Лекции по математической теории устойчивости*, Изд. Наука, Москва, 1967
- [3] Кручинин П.А., Магомедов М.Х., Новожилов И.В. *Математическая модель автомобильного колеса на антиблокировочных режимах движения*// Механика твердого тела. Москва 2001 №6. с 63-69 2.
- [4] Кручинин П.А., Магомедов М.Х., Макаров Л.М. *О подавлении паразитных колебаний при работе антиблокировочной системы колесных машин*// Материалы научной школы-конференции "Мобильные роботы и мехатронные системы. - М.: изд. МГУ, 2002.
- [5] Кручинин П.А., Магомедов М.Х., Макаров Л.М. *Активное подавление паразитных колебаний при работе антиблокировочной системы*// Вест. Моск. ун-та. сер. 1, математика. механика. 2003 № 5, с 25-29
- [6] Ляпунов А.М., *Общая задача об устойчивости системы*// Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1950.
- [7] Магомедов М. *Антиблокировочные системы робастно-адаптивной стабилизации движения колесно-транспортных средств*// Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, МГУ, Москва, 2003
- [8] Малкин И. Г., *Теория устойчивости движения* // Наука, Москва, 2004.
- [9] Маркеев А.П. *Теоретическая Механика* // Москва 1999

- [10] Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю. и Розов Н.Х. *Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах*// Изд. Физ-Иат литература, Москва, 1995
- [11] Морозов В.М. *Параметрический резонанс (Физико-механический практикум)*//Изд-во московского университета, Москва 2004
- [12] Новожилов И.В. *Фракционный анализ* // Изд-во механико-математического факультета МГУ, Москва 1995
- [13] Новожилов И.В., Кручинин П.А., Магомедов М.Х. *Контактные силы взаимодействия колеса с опорной поверхностью*// Сборник научно-методических статей. Теоретическая механика - Изд. МГУ. - 2000. - Вып. 23. - С.86-95.
- [14] Павлов И.С. *Математическое моделирование пространственного движения автомобиля*// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, МГУ, Москва, 1998
- [15] Новожилов И.В. и Павлов И.С. *Приближенная математическая модель колесного экипажа*// Изд. АН МТТ. 1997, №2, с 196-204
- [16] Тарг С.М *Краткий курс теоретической механики* //Изд. Наука, Москва 1967
- [17] Тихонов А.Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г., *Дифференциальные уравнения*// Изд. Наука, Москва, 1985.
- [18] Carley, L. *Antilock Brakes Becoming Standard On Today's Cars*// Counterman, September, 1997
- [19] Carley L., Mavrigian M. *Brake Systems*// HP Trade, 1998, ISBN 1557882819
- [20] Cho D. y Hedrick J.K., *Automotive Powertrain Modeling for control*// Transactions of ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol 111, No. 4, December 1989, 568-576.
- [21] Denny M. *The dynamics of antilock brake system*// European Journal of Physics. U.K. 26 (2005) 1007-1016
- [22] El Hadri A., Chikhi F. and Cadiou *Vehicle longitudinal brake optimal control using nonlinear estimator to search the wheel slip at the peak of the*

$\mu - s$ curve// Report from Mechatronics and Vehicle Dynamics System Engineering Laboratory, University of Versailles.

- [23] Erjavec J. *Automotive Brakes*//Thomson Delmar Learning, 2003, ISBN 1401835260
- [24] Gillespie T. *Fundamentals of Vehicle Dynamics*// SAE International, 1992, ISBN 1560911999
- [25] Khalil H., *Nonlinear Systems*// Prentice Hall, 1996, ISBN 0-13-228024-8
- [26] Limpert R. *Brake Design and Safety, Second Edition*// SAE International, 1999, ISBN 1560919159
- [27] McMahon D.H., Hedrick J.K. and Shladover S.E., *Vehicle Modeling and Control for Automated Highway Systems*// Proceedings of the 1990 ACC, San Diego, CA, May 1990
- [28] Maciucă D., Gerdes J. and Hedrick J. *Automatic Braking Control for IVHS*// Proceedings International Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC '94), Tsukuba, Japan, 1994.
- [29] Ming-Chin Wu, Ming-Chang Shih *Simulated and experimental study of hydraulic anti-lock braking system using sliding-mode PWM control*// Mechatronics 13 (2003) 331–351.
- [30] Pacejka H.B. *Tire and Vehicle Dynamics*// SAE International, 2002, ISBN: 0768011264
- [31] Pacejka H.B. *A hybrid computer model of tire shear force generation*// Technical report Highway Safety Research Institute, 1971
- [32] Ünsal C., and Pushkin K. *Sliding Mode Measurement Feedback Control for Antilock Braking Systems*// IEEE Transactions on Control Systems Technology, USA, March 1999.
- [33] Solyom S., Rantzer A. *ABS control—A design model and control structure*// Nonlinear and Hybrid Systems in Automotive Control, Springer Verlag, January 2003.
- [34] Song B., *Robust Nonlinear Control Design via Convex Optimization and Its Application to Fault Tolerant Longitudinal Control of Vehicles* PhD dissertation, University of California, Berkeley, 2002

- [35] Johansen T., Kalkkuhl' J., Ludemann J. and Petersen I., *Hybrid Control Strategies in ABS*// Proceedings of the American Control Conference Arlington, VA June 25-27, 2001
- [36] True H. *The Dynamics of Vehicles on Roads and on Tracks*// Taylor & Francis, 2003, ISBN: 9026519451
- [37] Utkin V., Guldner J. and Shi J., *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*// Taylor & Francis, 1999, ISBN: 0748401164